

5. 夹挤原理

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad};$$

注重 $x \rightarrow ?$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1: \quad \left[\frac{1}{x} \right] \in \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{x} \right]$$

夹挤原理

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

对比下这道题

$$\text{分子有理化} \\ \text{次数比较低时写的更清楚} \\ \text{次数高了反而难顶}$$

$$\text{① } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - 1 \\ = \sqrt{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) - 1 \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) \\ = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} + o\left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}\right) \\ = \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{② } \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} + 1} \\ = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x} + o\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x} + o\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)} \\ = \frac{1 + o(1)}{2 + o(1)} = \frac{1}{2}$$

这个方法更普遍

分子有理化
次数比较低时写的更清楚
次数高了反而难顶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^{100} - 3x^{99} + 3} - \sqrt{x^{100} + 3x^{99} - 4})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^{100}}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^{100}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \frac{3}{100x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

$$= -\frac{3}{100}$$

这个方法更普遍

提公因式
然后泰勒在求渐近线时
也可以广泛应用

4. $\infty - \infty$ 型 方法: 设法转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

(3) 求常数 c , s. t. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^2)^c - x$ 极限存在, 并求值.

直观猜测 $c = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^2)^{1/3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2 - x^3}{(x^2 + x^2)^{2/3} + x(x^2 + x^2)^{1/3} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x^2 + x^2)^{2/3} + x(x^2 + x^2)^{1/3} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{x})^{2/3} + (1 + \frac{1}{x})^{1/3} + 1} = 1/3$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

$x < \frac{1}{2}$ 时, $(x^2 + x^2)^{1/3} - x < 2^c \cdot x^{2c} - x$ 而后 $\rightarrow -\infty$

$x > \frac{1}{2}$ 时, $(x^2 + x^2)^{1/3} - x > x^{2c} - x$ 而后 $\rightarrow +\infty$

典例
先猜后证
记得**充要**

套路性太强

是否是1(不是1不行)
是否 x 趋于0(不是有0误差太大)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} + o\left(\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}\right) \right)}$$

$$\text{即 } \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - (1 - 2x^2) + o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{3}{2} + o(1)}{1 + o(1)}} = e^{\frac{3}{2}}$$

具体的过程

注意到: 在实际用等价无穷小的时候
不要写出复杂的 $o(1)$ (一堆)
真正只有在用泰勒的时候
才写出 $o(x)$ 1. 1^∞ 型

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^{h(x)} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}^{x^2} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot x^2}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)}{\frac{1}{x^2 - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 - 1} \cdot x^2}$$

$$= e^2$$

套路太明显:

① 判定为 1^∞ ② 取为 $e^{f(x) \ln g(x)}$ ③ $\ln g(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \frac{2}{x^2 - 1} + o\left(\frac{2}{x^2 - 1}\right)$ 基于等价无穷小的
极限计算常见的泰勒公式
(见补充资料)

0/0型

直接上泰勒

Ex. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

与 x 的底

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}$

错因来源:

① 厘清 $(1+x)^a$ 与 a^x 的区别:

$(1+x)^a = 1 + a x + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$a^x = 1 + \ln a \cdot x + \frac{(\ln a)^2}{2} x^2 + \dots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + o(x^n)$

② 注意条件:

泰勒在阶数足够时一定可用, 但阶数不够时应 $x \rightarrow 0$

有意思的一个题

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^x}{x^2}$

对于 $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ 底数与指数均与 x 有关, 不可直接等价

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{x \ln \frac{1}{x}}}{x^2}$

注意到 $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots$

此题因 1 有常数所以是等价无穷小, 故其不用写余项

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \frac{1}{x}}{x}$

$= -\frac{\ln \frac{1}{x}}{x} = -\frac{\ln x}{x} = -\frac{1}{x}$

优化: 如果是等价无穷小就不要带余项, 且等价无穷小与常数作运算还是等价无穷小

$\sim O(x + o(x)) = O(x) (x \rightarrow 0)$

即实际上占主导地位的是最大的数

二. $O(1) \in O(x)$

即 $x \rightarrow 0$ 时, $O(x^2) \in O(x)$

$O\left(x + \frac{1}{x}\right) \subset O(1)$

三. $O(x)$ 可乘:

$x \rightarrow 0: x^2 \cdot O(x) = O(x^3) \in O(x)$

$x \rightarrow +\infty: x^2 \cdot O(x) = O(x^3) \in O(x^2)$