

三角函数积分

一. 底层建筑:

① $\sin x$ 与 $\cos x$ 的 n 次幂

①. (1) 奇次幂:

$$\begin{aligned}\int \sin^{2n+1} x dx &= -\int \sin^{2n} x d\cos x \\ &= -\int (1 - \cos^2 x)^n d\cos x.\end{aligned}$$

拆开暴力积回去

①. (2) 偶次幂:

$$\int \sin^{2n} x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^n dx$$

拆开化为奇数次积回去

② $\tan x$ 的幂

$$(1) \int \tan x dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$(2) \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

(3) 高阶形式:

$$\begin{aligned}\int \tan^6 x dx &= \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^4 x d\tan x - \int \tan^4 x dx\end{aligned}$$

通过 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ 不断降阶

③ $\sec x$ 的幂

$$(1) \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(2) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(3) \int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + C$$

(4) 高阶

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x dx &= \int \sec^2 x \cdot d\tan x \\ &= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan x d\sec^2 x \\ &= \sec^2 x \cdot \tan x - \int \tan^3 x \cdot 2\sec^2 x dx \\ &= \sec^2 x \cdot \tan x - 2 \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x dx \\ &= \sec^2 x \cdot \tan x - 2 \int \sec^4 x dx + 2 \int \sec^2 x dx\end{aligned}$$

通过分部积分, 同积复现, 毕氏恒等式
不断降阶

④ 与之对应

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$$

符号恰好与 $\sec x, \tan x$ 一组相反

$$\text{ex: } \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot |\cos x| dx$$

分类讨论

PS: 本人写的有可能是错的
请一定指正!!!

二. 一些想法

① $1 \pm \text{trig}$:

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad 1 + \sin x = (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad 1 - \sin x = (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2$$

$$\frac{2 \sin^2(\frac{x}{2} + \pi/4)}{2 \cos^2(\frac{x}{2} + \pi/4)}$$

例: $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

$$(1) \int \frac{1}{1 + \cos x} dx + \int \frac{-d \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx - \ln(1 + \cos x) + C$$

折项 + 基于 $1 + \cos x$ 的降幂升角

$$= \tan \frac{x}{2} - \ln(1 + \cos x) + C$$

$$(2) \int \frac{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2}{\cos^2 \frac{x}{2}} d \frac{x}{2}$$

$$= \int (1 + 2 \tan t + \tan^2 t) dt \quad \text{sec}^2 t + 2 \tan t$$

$$= t - 2 \ln |\cos t| + \tan t - t + C$$

$$= \tan t - 2 \ln |\cos t| + C$$

$$= \tan \frac{x}{2} - 2 \ln |\cos \frac{x}{2}| + C$$

$$\hookrightarrow -\ln \frac{1 + \cos x}{2} + C$$

② 共轭处理:

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos x + \sin x - \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \csc^2 x dx - \int \csc x \cdot \cot x dx + \int \csc x dx$$

$$- \int \cot x dx$$

$$= -\cot x + \csc x - \ln |\csc x + \cot x| - \ln |\sin x| + C$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x} - \ln |1 + \cos x| + C$$

$$\hookrightarrow \text{万能公式} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sec x + 1} = \int \frac{\sec x + 1}{\tan^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sec x}{\tan^2 x} dx + \int \cot^2 x dx$$

$\hookrightarrow$ 实在无想法则

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \cot x - x + C$$

$$= \int \cot x \cdot \csc x dx = \cot x - x + C$$

$$= -\csc x - \cot x - x + C$$

③ 和差化积

$$\int \sin(19x) \cdot \cos(3x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 22x + \sin 16x dx$$

这个肯定不要硬记, 只要知道辅助角即可

例 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$

不加处理分拆后会去世

$$\int \frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx$$

$$= \int (\tan^2 t + 2 \tan t + 1) e^{2t} dt$$

$$= \int \sec^2 t e^{2t} dt + 2 \int \tan t \cdot e^{2t} dt$$

$$= e^{2t} \tan t - \int \tan t \cdot 2 \cdot e^{2t} dt + 2 \int \dots$$

$$= e^{2t} \cdot \tan t + C \quad \text{Ps: 见3页⑥处}$$

$$= e^x \cdot \tan \frac{x}{2} + C$$

④ 关于分类讨论

实际上, $x = a \sin t$; $x = a \tan t$;
通过限定 $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ 均可不分类

但 $x = a \sec t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ 一定要分类

⑤ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$= \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

令 $t = x + \frac{\pi}{4}$, $t = x - \frac{\pi}{4}$.

折项及效果绝佳!

Ex $\int_0^1 \frac{\ln^{1+x}}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x} dx$$

$$= \ln \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$$

不定积分小记

① 及时变更 dx .

$$\text{如 } I_n = \int \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + b^2}^n dx$$

不换元你积个寂寞

$$dx = d(x+a)$$

例: $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$. 计算 $I = \int_0^1 x f(x) dx$
怎么可能是先积出 $f(x)$ 再代入 I !!!

$$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx^2$$

$$= \frac{1}{2} f(x) \cdot x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot 2x \cdot e^{-x^4} dx$$

→ 分部积分后定积分部分为0是基操

$$\textcircled{2} \left. \begin{aligned} x dx &= \frac{1}{2} dx^2 \\ \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2} \end{aligned} \right\} \text{用于换元}$$

③ 一次根式 $\sqrt{1+x}$ etc.
⇒ 整体换元

高次根式 $\sqrt[5]{1+x^5}$
⇒ 先换 x^5 再换元

$\sqrt{1+\ln x} \Rightarrow$ 整体换元

④ 善用分部积分破局. $\implies$ Ex. f 在 $[a, b]$ 上连续可导, $f(x)$ 有界 $\implies$
 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0$

⑤ 西巴方后整体换元是个好习惯

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx = \int \frac{(x+1)-3}{\sqrt{3-(x+1)^2}} d(x+1)$$

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x) d \sin \lambda x$$

$$= \frac{1}{\lambda} f(x) \sin \lambda x \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \sin \lambda x dx$$

分出的 $\frac{1}{\lambda}$ 至关重要

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f(x) \sin \lambda x| dx$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{\lambda} (b-a) \cdot M \rightarrow 0$$

而前式也 $\rightarrow 0$

⑥ e^x 性质

$$(1) \int (f(x) + f'(x)) e^x dx = e^x \cdot f(x) + C$$

$$\text{以处理 } \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx, \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$$

$$(2) [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} (f'(x) - f(x))$$

$$\text{如: } f \in C'[0, 1], f(0) = 0, f(1) = 1. \implies \int_0^1 |f(x) - f'(x)| dx \geq \frac{1}{e}$$

不等号方向与积分绝对值不等号相同

$$\geq \int_0^1 e^{-x} |f(x) - f'(x)| dx \geq \int_0^1 |e^{-x} (f(x) - f'(x))| dx$$

$$\geq \left| \int_0^1 e^{-x} (f(x) - f'(x)) dx \right| = |e^{-x} \cdot f(x) \Big|_0^1| = \frac{1}{e}$$

定积分

一. 构造黎曼和:

核心: ① 构造出 $n \rightarrow +\infty$ 时的 $\frac{1}{n}$ 用于 dx .
② 找好标志点, 即 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 用于寻找上下界

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k+n)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\frac{k}{n} + 1)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$\hookrightarrow x_3$ 为 ξ ; 故积分区间为 $(0, 1)$

二. 变上限积分:

① $\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right]'$: 链式法则

② 变上限积分求极限 $\Rightarrow$ L-H

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

③ 对混参变上限积分求导

Core: $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) dt$ 中, x 是一个参数
既可以提出 $\int$ 也可以写入 dt

$$F(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt \text{ 求 } F'(x)$$

$$= \int_a^x (x f(t) - t f(t)) dt$$

$$= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt$$

川求导即可

$$\phi(x) = \int_0^1 f(xt) dt \text{ 求 } \phi'(x)$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^1 f(xt) dx = \frac{\int_0^x f(y) dy}{x}$$

注意积分上下限改变

④ 构造变上限积分处理不等式
—— 结合利用中值泰罗尔

例: f 在 $[a, b]$ 上二阶导连续
 f 上凸, 求证
 $f(\frac{a+b}{2})(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

以右为例, 构造
 $G(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)$
显然 $G(b) \geq 0$
 $G'(x) = f(x) - \frac{f(x)}{2}(x-a) - \frac{f(a)+f(x)}{2}$
 $= \frac{1}{2}(f(x)-f(a)-f(x)(x-a))$
 $= \frac{1}{2}(f(\xi)-f(x))(x-a) \quad (a < \xi < x)$
 $= \frac{1}{2}(\xi-a)(x-a)f''(\epsilon) \quad (a < \xi < \epsilon < x)$
两次构造中值定理

例: f 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(1) = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^3} f(x) dx$
 $\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1)$ s.t. $f(\xi) = 3\xi^2 f(\xi)$
考虑结论同法用: $(e^{-x^3} f(x))'$
 $= -3x^2 \cdot e^{-x^3} f(x) + f(x) \cdot e^{-x^3}$
 $\Rightarrow$ 一定以 $e^{-x^3} f(x)$ 整体作文章.
在构造积分第一中值定理时, 不应将二者分开

$4 \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^3} f(x) dx \xrightarrow{\exists \eta \in [0, \frac{1}{4}]} e^{-\eta^3} f(\eta) = f(1)$
令 $g(x) = e^{-x^3} f(x) \therefore g(1) = g(\eta)$
 $\therefore \exists \xi$ s.t. $g'(\xi) = 0$

Rolle定理与积分第一中值定理

PS: 引入积分因子:
 $f(x) - 3x^2 f(x) \quad e^{-\int 3x^2 dx} = e^{-x^3}$
 $\therefore$ 构造 $e^{-x^3} f(x)$ 相关的 $F(x)$
本题中即为 $e^{-x^3} f(x)$

积分因子法阐明了如何构造
 $f'(x) + p(x)f(x)$
 $= \left(\frac{e^{\int p(x) dx} f(x)}{e^{\int p(x) dx}} \right)'$

三. 定积分的对称性 $\Rightarrow$ 变换区间的定积分 $\Rightarrow$ 专治三角函数定积分与对称区间定积分

(1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

(2) $\int_{-x}^x f(t) dt = \int_0^x [f(t) + f(-t)] dt \Rightarrow$ 联想奇函数求积分

(3) 仅用于偶函数

$\int_{a-x}^{a+x} f(t) dt = 2 \int_{a-x}^a f(t) dt = 2 \int_a^{a+x} f(t) dt$
 $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt = 2 \int_{-x}^0 f(t) dt$

只有这儿才有系数 2
不要既换上下界又换上下界符号

例 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)} dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{x(\pi-2x)} dx = \frac{1}{\pi} \ln 2$

例证明 $I_n \triangleq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \equiv \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$
 并求之 $\Rightarrow$ 同积复现

$I_n = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x$
 $= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx$
 分部出 0
 $= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$
 $= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow$ 同积复现
 $\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

例: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x} dx \Rightarrow$ 为什么是求特殊区间上的定积分? $\Rightarrow$ 利用特殊性

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x \cdot e^x}{1+e^x} dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$

(2) $\int_0^{\pi} \left(\frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}} \right) dx$ 更直接, 一步到位

例: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-3x^2}} + \frac{\arcsin(-x)}{\sqrt{1-3x^2}} \right) dx = 0$

例: $\int_0^x e^{xt-t^2} dt = e^{x^2/4} \int_0^x e^{-t^2/4} dt$

$e^{x^2/4} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{4} + xt - t^2} dt$ 后式 $= \int_0^x e^{-\left(t - \frac{x}{2}\right)^2} dt = \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-m^2} dm$
 $= 2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-m^2} dm = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$

一定是手动从里面提出来的

例: 三角函数积分的对称性

证 $\int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \dots + \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}$

$\int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt = \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} + \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}$
 $= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{1+t+\pi} d(t+\pi)$
 $= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \sin t \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi} \right) dt$
 $= \int_{(2m-2)\pi}^{(2m-1)\pi} \frac{\sin t \cdot \pi}{(1+t)(1+t+\pi)} dt \geq 0$

trig 以 π 为单位的平移
区间折半使 trig 定号

$\Rightarrow$ 推论 $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt \geq 0$

以 $(2k\pi, 2k\pi+\pi) / (2k\pi+\pi, (2k+2)\pi)$ 来放缩

更进一步推论
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$ 存在

$\max \left(\int_0^{2k\pi}, \int_0^{2k\pi+2\pi} \right) < \int_0^x < \int_0^{2k\pi+\pi}$
 考虑两端极限

四. 定积分不等式

$$(1) f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(2) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

积分的绝对值 $\leq$ 绝对值的积分

$$(3) \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

积的积分的平方 $\leq$ 平方的积分的积

$$(4) f \in C[a, b] \quad g \in R[a, b] \quad \text{且 } g \text{ 不变号}$$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

注意: 后式不变号但将前式提出

$\xi \in [a, b]$ 且 ξ 可能与别的参数有关

$$\text{EX: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx = 1.$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{2} dx$$

$$\leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} dx + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$\leq \sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

用中值定理是错的

$$\exists \xi \in [0, 1] \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx = \sqrt{1+\xi^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

因为 ξ 可能与 n 有关 $\Leftarrow$ 被积函数与 n 有关

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\text{EX: } f \in C'[a, b] \Rightarrow f(x)_{\max} \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

$$\frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq |f(\xi)| \quad (\xi \in [a, b])$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(\xi)| + |f(\xi)| = |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right|$$

$$\leq |f(\xi)| + \int_{\xi}^x |f'(t)| dt \leq |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

$$\text{EX: } f \in C'[0, 1], f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 f'(x)^2 dx$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$$

$$f^2(x) \leq \left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^x 1 \cdot |f'(t)| dt \right)^2$$

$$\leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x f'(t)^2 dt = x \cdot \int_0^x f'(t)^2 dt \leq \int_0^1 f'(x)^2 dx$$

$$\therefore \int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 f'(x)^2 dx \right) dx$$

注意到 $\int_0^1 f'(x)^2 dx$ 是个常数

反常积分

一. 没有瑕点的积分一定是收敛的

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^4+x^2+1} dx \text{ 无需讨论}$$

$$\frac{|\cos u|}{3u^{\frac{1}{3}}} > \frac{\cos^2 u}{3u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1+\cos 2u}{6u^{\frac{1}{3}}} \text{ 连用放缩与降幂升角}$$

而 $\int_0^{+\infty} \frac{du}{6u^{\frac{1}{3}}}$ 发散 $\Rightarrow$ 条件收敛
 $\hookrightarrow$ 后式用D-判别

二. P判别法

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ 注意 } p \text{ 在分母上. 小心 } \int_0^1 x^p dx$$

三. 复习常见等价无穷小

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1 \Rightarrow \text{应用}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ 斯特林公式}$$

六. e^x 的行为:

$$\textcircled{1} +\infty \text{ 处: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$$

$$e^{-x} \leq \frac{C}{x^n} \Rightarrow m^{-p(x)} \leq \frac{C}{x^n}$$

$$m > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) \rightarrow +\infty$$

即指数比底数长的快

② 0 处: 直接等价于 1.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x \cdot \cos x} dx \text{ 发散}$$

四. 极限判别法:

(1) 完全替代: 不引入新的瑕点

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5+4x^{4+1}} \quad x \rightarrow +\infty \text{ 时确实 } \rightarrow x^5 \text{ 但直接替为 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5} \text{ 引入了 } x=0$$

这一新瑕点

$$\text{拆分} = \int_0^1 \frac{dx}{x^5+4x^{4+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$$

(2) 利用泰勒

$$\int_9^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+8x^3-9}} \Rightarrow x^2 \sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^4}} - x^2$$

$$= x^2 \cdot (1 + \frac{4}{x} + o(\frac{1}{x})) - x^2 = 4x + o(x) \sim 4x$$

七. $\ln^x$ 的行为

$$\textcircled{1} +\infty \text{ 处: } \frac{\ln^x}{x^n} = 0 \Rightarrow \ln^{f(x)} \leq C \cdot x^n$$

对于 $x > 1$ 而言: 且 $x \rightarrow +\infty$; $f(x) \rightarrow +\infty$

$f(x)$ 为一多项式

$$\text{因此 } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{f(x)}}{x^p} dx \text{ 与 } p\text{-法则很相似}$$

$p > 1$ 时 $\Rightarrow$ 收敛

$p \leq 1$ 时 $\Rightarrow$ 发散

$$\text{以 } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{1+x^2}}{x^p} dx \text{ 为例:}$$

$$A. p > 1 \text{ 时, 记 } q = \frac{p+1}{2} > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \cdot \frac{\ln^{1+x^2}}{x^p} = 0$$

$q > 1, \therefore f(x) = o(\frac{1}{x})$ 收敛

或 $p > 1$ 时, $f(x) < \frac{C}{x^{p-2}}$
 $p-2$ 必可 > 1 , 故收敛

B. $p < 1$ 时, $f(x) \geq \frac{\ln^2}{x^p}$ 发散

C. $p = 1$ 时, 分区间讨论 $\Rightarrow$ 发散

五. 三角函数与不定积分

① 直观应用: 有界性 (用于各类绝对收敛)

② 取特殊区间 $\Rightarrow$ 证明发散

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ 证明 } a \leq 0 \text{ 时发散}$$

$$\left| \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a} dx \right| = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a} dx \geq \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

③ $|\cos x| \geq \cos^2 x \Rightarrow$ 讨论一些恶心的条件收敛

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \cos x^3 dx \text{ 本身收敛 } \Rightarrow \text{注意 } x^3 \Rightarrow \text{换为 } u$$

$$\int_0^{+\infty} |x \cdot \cos x^3| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos u|}{3u^{\frac{1}{3}}} du$$

例: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

利用 $\ln x < C \cdot x^a$ 一定无用.

考虑到 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln(\ln x)$
 $\Rightarrow$ 发散

$\ln x$ 在 ∞ 处相对 x 为一个常数

例: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{0.9} \ln x}$

$\ln x < C \cdot x^a \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{C \cdot x^a}$
 $\therefore \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{0.9} \ln x} > \int_2^{+\infty} \frac{dx}{C \cdot x^{0.9+a}}$ 发散

例: $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} dx$ $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ 而
 $(x)^n \cdot e^{-\frac{1}{x}} \leq C \therefore e^{-\frac{1}{x}} \leq C \cdot x^n$
 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{C \cdot x^5}{x^5} dx$ 必收敛

② $\ln x$ 在 $x \rightarrow 0$ 处行为.

$\ln x$ 的核心就是慢

$\ln x \leq C \cdot x^n \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (1, +\infty)$

$|\ln x| \leq \frac{C}{x^n} \quad (x \rightarrow 0) \quad (0, 1)$

EX. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{0.9}} dx = - \int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} dx$
 $\hookrightarrow$ 绝对值收敛则收敛
 但绝对值发散不一定发散
 $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} dx \leq \int_0^1 \frac{C}{x^{0.9+a}} dx$ 收敛

EX. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 \ln x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} dx$
 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} dx \Rightarrow$ 推测 $x \cdot \ln x \rightarrow 0$
 $|\ln x| \cdot x^n \leq C$ 该式应发散
 $|\ln x| \leq \frac{C}{x^n} \therefore |\ln x| \geq \frac{x^n}{C}$
 $\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} dx \geq \dots$ 发散

EX. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9} \ln x} dx \Rightarrow$ 先分析胜过蛮力
 $\frac{1}{x^{0.9}}$ 收敛, $\ln x$ 使之变小
 $\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9} \ln^2} dx$ 更收敛

总之: $\ln x$ 在 0 与 $+\infty$ 处对原式的影响
 都不明显近于 P 法则 (见 P18 讨论)

七. 多项式的行为

在 $+\infty$ 处与在 0 处差别显著

$+\infty$ 处取决于最高次

0 处取决于最低次

EX. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$
 $= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$

由极限判别法 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x}} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^2} = 1$; 故 $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ 与 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

同收敛; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

同收敛

故原式收敛

$\int_0^1 \frac{x+3}{x+x^5} dx \xrightarrow[\text{最低}]{\text{何为}} \int_0^1 \frac{3}{x} dx$ 发散

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 一眼望穿

八. 瑕点换元 $\int_a^b f(x) dx$

① a 为瑕点则令 $t = x - a$.

$\int_0^{b-a} f(t) dt$

② b 为瑕点则令 $t = b - x$.

$\int_0^{b-a} f(b-t) dt$

EX. $\int_0^3 \frac{dt}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

拆出一个 $\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

$= \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)(t+1)(t+3)t}$

在 0 处取决于 $\frac{1}{6t}$ 发散

拆出一个 $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x-2)}$

令 $x = 2 - t$ 则 $\int_1^2 \frac{-dt}{(2-t)(1-t)(3-t)(-t)}$
 $= \int_0^1 \frac{dt}{t(t-3)(t-2)(t+1)} \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{-6t}$ 发散

反常积分题集

一. 反常积分与定积分的关系

(1) $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$
分部出 0

$$-x^{n-1} \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{n-2} dx \\ = (n-1)(n-2) \cdots = (n-1)! \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ = (n-1)!$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$
求: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cot x dx \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$
 $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$

① 见到 $\cot x$ 与 $\ln \sin x$ — 一眼望穿

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot d \ln \sin x \Rightarrow$ 关键地方验证一下
 $= x \cdot \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$

而前式: $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln \sin x) = x \cdot \ln x = 0$

② $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin t}{\cos t} d \sin t$

③ 令 $x = \tan t$. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$
如果原函数能轻松算出, 何必定积分

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)| dt$ 与分部积分
越发复杂

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$
看着有戏

$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(x + \frac{\pi}{4}) dx + \frac{\pi}{8} \ln 2$

$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{2}-x) dx$

两式抵去

二. 反常积分的推导逻辑很重要

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(\ln(1+x))^{\frac{1}{2}}} < \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$$

但小于发散的有个作用

三. 过程写法: 人为猜测等价的式子

① 高阶无穷小写法:

A. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+x} dx$

分析 $\Rightarrow \leq \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} dx$. 取 n 为 4.

过程 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x+x} = 0$

$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛

B. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x^3+2x+1}}$

分析 $\Rightarrow \leq \frac{C}{x^{\frac{3}{2}-n}}$ 令 $n=0.1$

过程 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+2x+1}} \cdot x^{1.4} = 0$

② 等价写法:

$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x \cdot (\ln x + 9)} \Rightarrow \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x \cdot (\ln x + 9)}}{\frac{1}{x}} = 1$

EX. $\int_0^1 \sqrt{\cot x} dx \sim \sqrt{\frac{1}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{1}{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

EX. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} dx$
0 与 $\frac{\pi}{2}$ 各有瑕点. 把趋于常数的部分提出来.

$x \rightarrow 0, \tan x \rightarrow x^p$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x) \rightarrow \frac{\pi}{2}-x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^q} dt$

Ex. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx.$

① $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$

读本上分析的是 $\ln x$ 在 $(0, \rightarrow -\infty)$ 与 $(+\infty, \rightarrow +\infty)$ 的行为
这个 $\ln(x+1)$ 在 $x \rightarrow 0$ 直接 $\rightarrow x$ 等价无穷小带走即可!

$\sim \int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} dx$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx.$

$\leq \int_1^{+\infty} \frac{C \cdot x^n}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{C}{x^{p-n}} dx \Rightarrow$

$\begin{cases} p > 1, \text{收} \\ p = 1, \text{发} \\ p < 1, \text{发} \end{cases}$

$\leftarrow$ 这两是 $\frac{\ln(x+1)}{x^p} > \frac{1}{x^p}$

低阶ODE

一. 一阶ODE

判定: 仅含一阶导

① 分离变量

② 常数变易与积分因子

——本质上是一件事, 所求的积分也是一样的

如: $y^2 dx + (x - 2xy - y^2) dy = 0$

观察到化为 $\frac{dy}{dx}$ 的形式过于复杂

$$\Rightarrow x' + \frac{1-2y}{y^2} x - 1 = 0$$

$$x' + \frac{1-2y}{y^2} x = 1 \Rightarrow \text{注意到}$$

标准形式必须 x' 前系数为1

$$e^{\int \frac{1-2y}{y^2} dy} = e^{-2\ln|y| - \frac{1}{y}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{y}} \cdot y^2}$$

勿忘分子 $\leftarrow$

$$\frac{x}{y^2 \cdot e^{\frac{1}{y}}} = \int y^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{y}} dy$$

无论何种方法, 这个积分一定跑不了, 换元即可

$$\Rightarrow x = y^2 + C y^2 \cdot e^{\frac{1}{y}}$$

③ 伯努利方程 $y' = P(x)y + Q(x)y^n$

——核心: 1) 除 y^n 2) $z = y^{1-n}$

$$3) \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Ex: } \frac{dy}{dx} = 6 \frac{y}{x} - xy^2 \Rightarrow \text{满足判定}$$

$$\text{注: } e^{6\ln x} = x^6 \neq 6x$$

$$\text{Ex: } y \cdot y' = 2(y')^2$$

$$\text{令 } p = y' \therefore \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$\therefore y \cdot \frac{dp}{dy} p = 2p^2$$

$$\therefore \frac{1}{2p} dp = \frac{1}{y} dy$$

$$\therefore \frac{1}{2} \ln|p| = \ln|y| + C$$

$$\therefore p = C_1 \cdot y^2 \Rightarrow \ln \text{漏系数??}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C_1 x + C_2} \quad \begin{matrix} C_1 \text{ 可正可负} \\ \text{而 } y=0 \text{ 为特解} \\ \text{可为 } 0 \end{matrix}$$

注: ① 每积一次分, 加一个C
② 检测是否有零解

二. 可降阶ODE

① 不显含 $y^{(0)}$: $F(y'', \dots, y^{(n-m)}, x) = 0$

② 不显含 x : $F(y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

仅考查二阶非线性

二阶线性的利用特征根

$$\text{设 } p = \frac{dy}{dx} \text{ 则 } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$\text{Ex: } (y'')^2 - y' = 0 \Rightarrow \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right)^2 = p$$

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = \sqrt{p}$$

$\rightarrow$ 不要试图平方

见18页注释

高阶ODE

一. 关于线性相关性

① 线性相关性与区间有关
描述的不是全实数上的相关性

② $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$

线性相关的必要条件

$\Rightarrow W(t) \equiv 0$ (尚不知为解)

③ 已知是解之后:

线性相关 $\Leftrightarrow W(t) \equiv 0$

线性无关 $\Leftrightarrow W(t) \neq 0$

④ $1, x, x^2, \dots, x^n$

$1, e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^n e^{\lambda x}$

$1, \sin ax, \cos ax, \sin 2ax, \cos 2ax, \dots$

$1, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^n e^{\alpha x} \sin \beta x$

三. 高阶常系数ODE

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x^{(0)} = f(t)$$

$$\textcircled{1} \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1$ (重数 m_1)

$\lambda_2 (m_2) \dots \lambda_k (m_k)$

复根 $\lambda_n = \alpha \pm \beta i$ (重数 m_n)

...

线性无关解为:

$e^{\lambda_1 t}, x \cdot e^{\lambda_1 t}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}$

$e^{\alpha} \cos(\beta t), \dots, t^{m_n-1} e^{\alpha} \cos(\beta t)$

$e^{\alpha} \sin(\beta t), \dots, t^{m_n-1} e^{\alpha} \sin(\beta t)$

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$e^{-i\beta} = \cos \beta - i \sin \beta$$

二. 二阶线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \Rightarrow x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

注: 观察到 x'' 前系数为 1.

① 已知 x_1, x_2 两个线性无关解.

$$\text{令 } x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad x' = C_1' x_1 + C_1 x_1' + C_2' x_2 + C_2 x_2'$$

$$\text{令 } C_1' x_1 + C_2' x_2 = 0 \Rightarrow x'' = C_1' x_1' + C_1 x_1'' + C_2' x_2' + C_2 x_2''$$

$$\text{代入化简有: } C_1' x_1' + C_2' x_2' = f(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' x_1 + C_2' x_2 = 0 \\ C_1' x_1' + C_2' x_2' = f(t) \end{cases}$$

形式好记, 但勿忘判定

$$\text{EX: } x_1 = t, x_2 = e^t \Rightarrow (t-1)x'' - tx' + x = 0$$

$$\text{试解 } (t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2$$

注意到 x'' 前系数

$$x'' - \frac{t}{t-1}x' + \frac{1}{t-1}x = 0 \Rightarrow x'' - \frac{t}{t-1}x' + \frac{x}{t-1} = t-1$$

$$\begin{cases} C_1' x_1 + C_2' x_2 = 0 \\ C_1' x_1' + C_2' x_2' = t-1 \end{cases}$$

② 已知一个解 $x_1 \Rightarrow$ 直接 $x = C x_1$

$$\text{EX: } y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

$$0 \pm i(2)$$

$$\cos x, x \cos x$$

$$\sin x, x \sin x$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x$$

四·高阶ODE非齐次

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x^{(0)} = f(t)$$

① 求出 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}$

② 给出齐次解

依 $f(t)$ 长相分类:

A: $f(t) = e^{\lambda t} \cdot g(t)$, $g(t)$ 为一多项式
 λ 为实数

$$\text{则 } x_p = g(t) \cdot t^{m_\lambda} \cdot e^{\lambda t}$$

m_λ 为 λ 的重数

$$\deg(g) = \deg(g)$$

B: $f(t) = g(t) \operatorname{trig}(\lambda t)$
 同 C, 将 trig 复数化

C: $f(t) = g(t) \operatorname{trig} \lambda x \cdot e^{2x}$, trig 为 cos/sin
 λ 为实数

将 trig 复数化, 为 $e^{(\alpha + i\lambda)x}$

$$x = g(t) \cdot t^{m(\alpha + i\lambda)} \cdot e^{(\alpha + i\lambda)x}$$

$$\text{代入 } x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = g(t) \cdot e^{(\alpha + i\lambda)x}$$

解出 x , 则对原方程

$\cos \lambda x$ 特解为 $\operatorname{Re}(x)$

$\sin \lambda x$ 特解为 $\operatorname{Im}(x)$

B2: 三角函数不复杂化作法

$$f(t) = e^{\alpha x} (g(t) \cos \beta x + q(t) \sin \beta x)$$

$$x_p = t^{m_{\alpha + \beta i}} \cdot e^{\alpha x} (A(t) \cos \beta x + B(t) \sin \beta x)$$

1) 本质上还是解 $f(t) = e^{(\alpha + \beta i)x}$
 不过将其拆开了

2) 判的是 $\alpha + \beta i$ 是否为 λ !

3) $\deg A$ 与 $\deg B$ 为 $\max \deg(g, t)$

且哪一项 $q=0$ 或 $g=0$

x_p 中也有 $A(t)$ 与 $B(t)$

$$\text{EX: } y'' + 4y = \cos 2x$$

1) 复值化

$$y'' + 4y = e^{2ix} \quad m_{2i} = 1$$

$$\therefore y_p = t \cdot x \cdot e^{2ix}$$

$$y_p'' = 4t e^{2ix} (i - x)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{4} i$$

$$y = -\frac{1}{4} i x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$\operatorname{Re}(y_p) = \frac{1}{4} x \cdot \sin 2x$$

$$2) y_p = x^{m_{\alpha + 2i}} \cdot e^{0} \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

代入之即可

$$\text{EX: } y''' - y'' + y' + y = 4(x+1) \cos x$$

$$\Rightarrow 4(x+1) e^{ix} \text{ 取 Re}$$

$$\text{EX: } y^{(4)} + y'' = 10 e^x \sin x$$

$$\Rightarrow 10 e^{(1+i)x} \text{ 取 Im}$$

$$\text{EX: } y'' - 2y' + y = 6(x+1) e^x$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = 1 \quad (m_1 = 2)$$

$$y_1 = e^x \quad y_2 = x \cdot e^x$$

$$y_p = (Ax + B) \cdot x^2 \cdot e^x = (Ax^3 + Bx^2) e^x$$

$$y_p' = (Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx) e^x$$

$$= (Ax^3 + (B + 3A)x^2 + 2Bx) e^x$$

$$y_p'' = (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (4B + 6A)x + 2B) \cdot e^x$$

$$\therefore (6Ax + 2B) e^x = 6(x+1) e^x$$

$$\therefore A = 1 \quad B = 3$$

$$\therefore y_p = (x^3 + 3x^2) e^x$$

$$\therefore y = (x^3 + 3x^2) e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$\text{Ex: } y'' - 2y' + y = 6(x+1)e^x + x^2 \sin x + 1$$

利用解的线性性

$$g(x) \cdot e^x + f(x) \cdot \sin x + e^{0x}$$

四. 欧拉方程

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

$$\text{令 } |t| = e^s \text{ 即 } s = \ln|t|$$

$$\text{则 } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right) \end{aligned}$$

$$\text{实际上: } x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}$$

$$x^2 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{d}{ds} - 1 \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}$$

$$\begin{aligned} x^3 \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} &= \left(\frac{d}{ds} - 2 \right) \left(\frac{d}{ds} - 1 \right) \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{d^3 x}{ds^3} - 3 \frac{d^2 x}{ds^2} + 2 \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

$$\text{Ex: } t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dx}{ds} + 2x = 0$$

积分的应用

一. 积体积

— 对x积分

① 绕x轴:

$$\int_a^b y^2 dx$$

② 绕y轴:

$$\int_a^b 2\pi xy dx$$

区分被积轴
与旋转轴关系

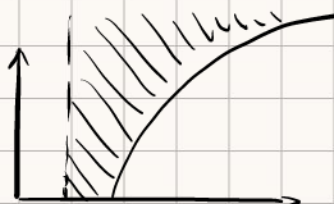
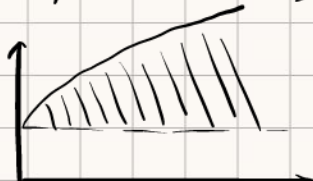
⊥ or //

③



=> 作差

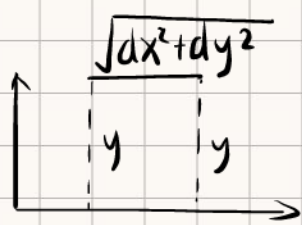
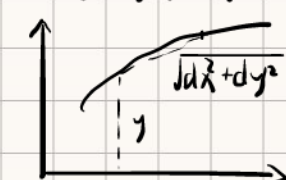
④



y-h
or h-y

x-h
or h-x

三. 表面积



① 绕x轴: $\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \cdot \sqrt{dx^2+dy^2}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

② 绕y轴: $\int 2\pi x \sqrt{dx^2+dy^2}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

③ 参方: $\int_{t_1}^{t_2} 2\pi y \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$ — 绕x

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\pi x \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$$
 — 绕y

④ 极坐标:

与③相似. x与y相应替换

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi x \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$$

四. 曲率

① 参数形式: $k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$② k = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 0^2+1^2-0 \times 2$$

③ 极坐标: $k = \frac{|r^2 + r'^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$

④ 曲率圆:

下面1与2多, 上面0多

1) $R = \frac{1}{k}$

2) 确定法线: $Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0)$

3) 确定圆心: (a, b)

A. 圆心在法线上

$$b - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(a - x_0)$$

$$B. (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 = R^2$$

C. 圆心在凹处

EX: $y = \ln x$. 弧长 $[\sqrt{3}, \sqrt{5}] \Rightarrow$ 没法特殊值

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \xrightarrow{\substack{x=\tan t \\ dx=\sec^2 t}} \int \frac{\sec^3 t}{\tan t} dt$$

$$= \int \sec x \tan x dx + \int \csc x dx$$

HHT笔记

一. 分部积分的选择经验

$$\ln > \text{arc} > x^a > \text{trig} > e^x$$

← 留在原地 凑微分

二. 欧拉代换处理复杂根式

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = M$$

$$\textcircled{1} a > 0, M = \pm \sqrt{a}x + t$$

$$\textcircled{2} c > 0, M = tx + \sqrt{c}$$

$$\textcircled{3} \text{可约型 } \sqrt{a(x-b)(x-c)} = t(x-b)$$

t 是一个新变量

$$\text{EX: } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}; \text{ 令 } \sqrt{x^2+x+1} = -x+t$$

$$\text{则 } x^2+x+1 = x^2-2tx+t^2$$

$$\therefore x = \frac{t^2-1}{2t+1}; dx = \frac{2t^2+2t+2}{4t^2+4t+1} dt$$

$$\therefore \int \frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2} dt$$

$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2} \right) dt$$

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2} = 2$$

$$\text{同乘 } A(2t+1)^2 + Bt(2t+1) + Ct = 2t^2+2t+2$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{ 时, } -\frac{1}{2}C = \frac{3}{2} \quad C = -3$$

$$t = 0 \text{ 时, } A = 2$$

$$t = 1 \text{ 时, } 18 + 3B - 3 = 6 \quad B = -3$$

$$\int \frac{2}{t} dt - \int \frac{3dt}{2t+1} - \int \frac{3dt}{(2t+1)^2}$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| - \frac{3}{2} \cdot (2t+1)^{-1}$$

$$= 2\ln|x + \sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1|$$

$$+ \frac{3}{4x + \sqrt{x^2+x+1} + 2} + C$$

$$\text{EX: } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} \quad M = tx - 1 \dots$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} \quad \text{别忘了 } \sec x \text{ 长啥样}$$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{-d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$$

$$= -\ln |\csc x + \cot x|$$

$$\text{四. } \int \frac{c\sin x + d\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx$$

$$\text{A. } \int \frac{-b\sin x + a\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx$$

$$= \ln |a\sin x + b\cos x|$$

$$\text{B. } \int \frac{a\sin x + b\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx = x$$

A与B线性组合

五. N-L公式的应用

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\tan x}{2 + \tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{2\pi}$$

注意到 f(x) 有断点

应有别处理

$$\text{有对称性} = \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

还会错无数次
才会记住

六. 换元合法性

- ① $\varphi(t)$ 应严格单调
- ② $\varphi(t)$ 在 $[a, \beta]$ 上 Ran 严格属于 $[a, b]$

EX. $\int_0^\pi x f(\sin x) dx$ $x = \pi - t$
 老实换元, 变量不要重

$$\int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt$$

$$= \int_0^\pi (\pi - x) f(\sin x) dx$$

七. 定积分对称性

- ① $\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^\pi f(\cos x) dx$
- ② $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$
 也即直接将 x 处理掉

EX. 证明 $\int_0^{2\pi} \left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = 0$

设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 则

$$\int_0^{2\pi} (F(2\pi) - F(x)) dx$$

$$= F(2\pi) \cdot 2\pi - \int_0^{2\pi} F(x) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} x dF(x)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$
 设原函数 + 逆用分部积分

八. D-A. 狄利克雷与阿贝尔

$$\int_a^b f(x) g(x) dx$$

D: $\int_a^b f(x) dx$ 有界 (有界不定收敛)

$g(x)$ 单调且 $g(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow b^-$

A: $\int_a^b f(x) dx$ 收敛
 $g(x)$ 单调有界

EX. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$

$\rightarrow \infty$ 时, 对 trig 用 D 判别

$x_p \rightarrow 0; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
 $\rightarrow$ 积分无界 积分有界

$\Rightarrow$ 直接视为充要

九. $x \rightarrow \infty$ 时, $\ln f(x)$ 对收敛
 不影响, 相当于一个常数

$\Rightarrow$ 大多数时候

十. 三角函数积分的线性性

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin^2 x}} dx$$

$$2 + \sin^2 x = 1 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= 3 - (\sin x - \cos x)^2$$

$$\int \frac{-\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} dx$$

$$= \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin^2 x}|$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} dx$$

$$= \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ 原式 =

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln (\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin^2 x}) + C!!!$$

一. 泰勒公式应用

① 求特殊点的导数

$$f(x) = \sin(x^3), \text{ 求 } f^{(15)}(0)$$

注意泰勒形式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + O((x-x_0)^{n+1})$$

故 $f^{(15)}(x_0)$ 对应 $(x-x_0)^{15}$

对原式展开:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^9 + \frac{1}{120}x^{15} + O(x^{15})$$

$$\text{故 } \frac{f^{(15)}(0)}{15!} = \frac{1}{120}$$

$$\text{② } f(x) = \frac{1}{x^2-4x} \text{ 在 } x=2 \text{ 处}$$

2n阶泰勒多项式

书上习题

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(\frac{x-2}{2})^2}$$

几阶泰勒对应的 $(x-x_0)$ 为几次方

$$-\frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^n (\frac{x-2}{2})^{2k}$$

多项式不带余项; 但展开式带余项

三. 极值点是 $x=x_0$

拐点是 (x_0, y_0)

四. $\int_0^x f(t)dt$ 与 $\int f(x)dx$ 区别

$$\text{比如 } \int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt{1+2g(t)}} dt = \sqrt{1+2g(x)} - 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $F(x)$ $F(0)$

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1+2g(x)}} dx = \sqrt{1+2g(x)}$$

五. 特解重点是猜

$$y'' - 2y' + y = 2 \Rightarrow \text{显然 } y=2$$

$$\text{EX. } y'' - 3y' + 2y = e^x, y(0)=1, y'(0)=1$$

也就是解出通解, 代入即可

$$y_p = a \cdot x \cdot e^x$$

$$\text{EX. } y^{(4)} - y^{(2)} = 0, x \rightarrow 0 \text{ 时, } y \sim x^3$$

① 不要被可降迷惑了, 之前的不显含要换元是因为非线性

② 积一次分, 加一个C.

否则多次积分让你去世

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cdot e^x + c_4 \cdot e^{-x}$$

= 带 $\ln x$ 的反常积分 $\Rightarrow$ 换元法

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \text{ 令 } t = \ln x, \text{ 则}$$

注意 $\leftarrow$ 此处没有选择1为下界

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$$

$\therefore p > 1$ 收敛; $p \leq 1$ 发散

$$\text{EX. } \int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\int_0^2 \frac{\ln x}{x^{-p}} dx \quad -p < 1, p > -1.$$

$$\text{可取等号? } \int_0^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^2 \ln x d \ln x$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_0^2 \quad \text{不可}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{4-p}} dx \quad p=3 \text{ 时, } \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_2^{+\infty} \text{ 不可}$$

$$- \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

写掉了 $\frac{-x}{x^2+1}$ 的 x .
你也好马-马-马啊.

二. 什么叫线性常微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

系数可以为 x 的多项式.

Ex: x, x^2 为二阶齐次线性常微分方程的根; 求原方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

注意到这个和求 y_p 不一样.
老实代入解方程组

三. 为什么积面积会积出负值

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos t \\ y = -1 + \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

$x \in [0, 2]$, 与 t 一一对应, 但单调性相反

$$\int_0^2 \pi y^2 dx = \int_{3\pi/4}^{\pi/4} \dots dt$$

四. 他又改回去了

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x) dx$$

分部出 0 后

$$\int_0^1 2x^2 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} f(\sqrt{x}) dx$$

$$\text{令 } x^2 = u, \text{ 则 } du = 2x dx$$

$$= 2\sqrt{u} dx$$

$$\int_0^1 2x^2 f(x^2) dx = \int_0^1 2u \cdot f(u) \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u} f(u) du = \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(\sqrt{x}) dx, \text{ 令 } t = \sqrt{x} \quad x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot f(t) \cdot 2t dt = - \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

反复更换亚元

五. 常数函数是周期函数

六. 但凡静下来想一想

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

① 降幂升角

$$A \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \cos 2x} = B \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \sin 2x}$$

万能公式 A:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1$$

万能公式 B:

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

到了这一步还放着是图啥?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{(t + \frac{1}{2}) \cdot 2}{\sqrt{3}} \Big|_0^1$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x (3 + \tan^2 x)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{3 + t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

一. 形式型泰勒:

① $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x}}$ 在 $x=0$ 处展开 n 阶

② $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}{e^x}$ 在 $x=0$ 处展 n 阶

① $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 展开 $(1+x)^2$ 展开

$$1 + 2x + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n)}{n!} (-4x)^n + O(x^{n+1})$$

故 $f(x)$ 展开 $= x + 2x^2 + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n)}{(n-1)!} (-4)^{n-1} x^n + O(x^{n+1})$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$(\frac{1}{2}x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$+ x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x$$

$$+ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \dots + \frac{(-x)^{n-2}}{n!} (\frac{1}{2}x^2)$$

其实考试时可以写到 $(\frac{1}{2}x^2 + x + 1) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + O(x^{n+1})$

证明②: $\int_0^a g(x) dx$
 $= g(x) \cdot x \Big|_0^a - \int_0^a x dg(x)$
 $(0-0) - \int_0^a x(-f(x)) \cdot dx$
 $= \int_0^a x \cdot f(x) dx$

五. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 想欧拉代换
 个锤子. $t = \frac{1}{2} - x$. 得 $\arcsin$

六. 通解如何去绝对值?

$$-|n^{1-y}| = \sin x + C$$

$$\frac{1}{1-y} = C \cdot \sin x$$

C : 可正可负

七. 极坐标和平面面积

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} \rho(\theta)^2 d\theta$$

Ex: 双纽线 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

二. $\begin{cases} x = \int_t^{t(2+t)} \sqrt{1+2\cos\theta} d\theta \\ y = t(1-t) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处切线

就怕你算了 $dx/d\theta$ 就忘了要干啥 $\Leftrightarrow$ 就怕你算了通解就忘了初值

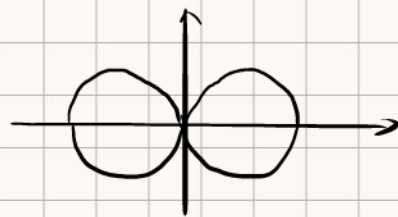
三. 渐近线: $5 \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}}$ $x \rightarrow +\infty$

$y = ax + b$ 换元: $\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}} - x$

令 $t = x+4$. 则 $x = t-4$

$$= \sqrt{\frac{t^3 - 6t + 11t - 6}{t}} - t + 4$$

不写出4必死



$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos 2\theta d\theta$$

四. 多重积分记 $g(x) = \int_x^a f(t) dt$. 则

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a x f(x) dx \Rightarrow \text{至少知道如何检验}$$

证明①: 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. $g(x) = F(a) - F(x)$

$$\int_0^a (F(a) - F(x)) dx = a \cdot F(a) - \int_0^a F(x) dx$$

$$= F(x) \cdot x \Big|_0^a - \int_0^a F(x) dx = \int_0^a x dF(x) = \int_0^a x f(x) dx$$

一. 和面积最保险的方式.
—— 把图画来避免积分
区间重复

EX: $r = \sin \theta$.

- ① 首先这是个圆.
- ② 哪怕你不知道是圆, 画个草图也能知道这个圆 $[0, \pi]$ 与 $[\pi, 2\pi]$ 是完全重叠的. 因而 $\int_0^{2\pi}$ 会积两次. 答案为 $\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$

二. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$ 分部积分

$$\frac{1}{(1-x)^2} dx = d \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

三. 有的是题就很野, 专门考查你微分方程的常数解

$$\begin{cases} y'' + 2xy' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

没有通解.
只有 $y=1$.

四. 求 p 的范围使得:

$$\int_1^{+\infty} (\sin \frac{\pi}{x}) \frac{dx}{\ln^p x} \text{ 收敛}$$

$x \rightarrow 1$ 时, 如何展开 $\sin \frac{\pi}{x}$?

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{x}) &= \sin(\pi - \frac{\pi}{x}) \\ &= \sin(\pi \cdot (1 - \frac{1}{x})) \sim \pi \cdot (1 - \frac{1}{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1: \pi \cdot (1 - \frac{1}{x}) \cdot \frac{dx}{(x-1)^p} &= \frac{\pi dx}{x(x-1)^{p-1}} \\ &\sim \frac{dx}{(x-1)^{p-1}}. \therefore p-1 < 1 \Rightarrow p < 2 \end{aligned}$$

$$x \rightarrow +\infty, \frac{\pi \cdot dx}{x \cdot \ln^p(x)} \quad p > 1 \text{ 收敛}$$

$$\therefore p \in (1, 2)$$

五. $f(x)$ $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, 0 < f(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$
求证: $[\int_0^1 f(x) dx]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$

老老实实变上限积分, 别想什么骚操作

$$G(x) = [\int_0^x f(t) dt]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2 \int_0^x f(t) dt \cdot f(x) - f(x)^3 \\ &= f(x) [2 \int_0^x f(t) dt - f(x)^2] \end{aligned}$$

$$H(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f(x)^2$$

$$H'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f(x) = 2f(x)(1 - f(x)) > 0 \text{ over}$$

六. 复合根式逐次换元

$$\int_0^{\ln^2} \sqrt{e^x - 1} dx. \text{ 令 } t = \sqrt{e^x - 1} \text{ 当场去世}$$

$$\text{令 } t = e^x. \text{ 则 } x = \ln t. dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\int_1^2 \sqrt{t-1} \cdot \frac{1}{t} dt \quad \text{令 } \sqrt{t-1} = m \quad t = m^2 + 1$$

$$dt = 2m dm$$

$$\int_0^1 \frac{2m^2}{m^2+1} dm.$$

$$七. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \text{经典换元}$$

八. $f(x)$ 在实轴上连续, 且 $f(x) = x + \int_0^x f(t) dt$.

则 $f(x) =$

积分方程取几次微分就成了微分方程. 但暗藏初值

注意到 $f(0) = 0$

$$\therefore f(x) = C \cdot e^x - 1 = e^x - 1$$

$$\text{EX: } f(x) = 4e^x + \int_0^x (x-s)f(s) ds.$$

注意到你在求导过程中

$$\Rightarrow f(0) = 4 \quad f'(0) = 4$$

一. 微分方程的描述

① $y'' - 5y' + 6y = \cos x$ 的通解;

通解 $\Rightarrow y = C_1 f(x) + C_2 \dots$

② 求 $f(x), g(x)$ 的表达式

只有一个, 不含参

③ $\begin{cases} y' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1; y(0) = 0 \end{cases}$ 的解

$y(0) = 1; y(0) = 0$

只有一个, 甚至可为常数