

2025 级微积分 A1 期末考试

mathsdream 整理版

2026.01.14

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

一、选择题（共 7 题，每题 3 分，共 21 分）

1. 下列命题正确的是 _____

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - a| < \frac{1}{n}$.

B. 设 $a \in \mathbb{R}$, 若对无穷多个正数 ϵ , $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \epsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

C. 若 $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

D. 若 $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n^2} (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

2.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^3 x} \ln(1+t) dt}{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

3. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当 _____

A. $p < 1$

B. $p > 1$

C. $1 < p < 2$

D. $p > 2$

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 _____

- A. $K > M > N$
 B. $M > K > N$
 C. $M > N > K$
 D. $K > N > M$
5. 下列结论正确的是 _____
- A. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.
 B. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.
 C. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有原函数.
 D. 若 f 在 $[a, b]$ 上有原函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.
6. 设函数 $f(x)$ 可导, $f(0) = 2$, 且 $f'(x) < 2f(x)$, 则 _____
- A. $f(-1) > 2$
 B. $f(-1) < \frac{2}{e^2}$
 C. $f(1) > 2e^2$
 D. $f(1) < 2e^2$
7. 已知 $f \in C^2[-1, 1]$, $f''(x) > 0$, 且 $f(-1) + f(1) = 0$, 由此不能得到的结论是 _____
- A. $\exists \xi \in [-1, 1]$, 使得 $f(\xi) = 0$.
 B. $\exists \xi \in [-1, 1]$, 使得 $f'(\xi) > 0$.
 C. $f(0) < 0$.
 D. $\int_{-1}^1 f(x)dx < 0$.

二、填空题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n}) = \underline{\hspace{2cm}}.$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 已知曲线段 Γ 在极坐标系下的方程为 $r = e^\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 则 Γ 的弧长为 _____.
11. 已知 $f(x) = e^x \sin x$, 则 $f'''(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
12. 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \int_{\sin x}^x \ln(1+t)dt$ 与 x^p 是同阶无穷小量, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}.$
13. 微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

14. (13 分) 设函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点和极值;

(3) 求 $f(x)$ 的拐点, 以及上凸和下凸区间.

15. (10 分) 已知 $f(t) = \int_0^\pi |t - \sin x| dx$, 求 $f'(t)$ 的表达式, 并求 $f(t)$ 的最小值.

16. (8 分) 记平面有界区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体为 Ω . 求 Ω 的体积与侧面积.

17. (8 分) 求广义积分的值 $\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{x(x+1)(x^2+1)}$.

18. (12 分) 设函数 $f(x)$ 可导, $f(0) = \frac{1}{3}$, 且满足方程:

$$f'(x) + 2f(x) + \int_0^x f(t)dt = -3(x+1)e^{-x} + \frac{5}{3}$$

求 $f(x)$.

19. (10 分) 记初值问题 $\frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}$, $y(0) = 1$ 的解为 $y = \varphi(x)$.

(1) 求 $\varphi(x)$;

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n\varphi(x)}{(nx)^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$.

四、附加题 (本题完全正确才有分, 且分数不计入总分, 仅用于评判 A+)

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \sin x_n$, $y_{n+1} = y_n^2$ ($n \geq 1$), 且 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$. 求证: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量.

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、选择题

1. 下列命题正确的是 D

- A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - a| < \frac{1}{n}$.
 B. 设 $a \in \mathbb{R}$, 若对无穷多个正数 ϵ , $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \epsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
 C. 若 $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.
 D. 若 $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n^2} (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

解析: A 错误, 取数列 $a_n = \frac{2}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - 0| = \frac{2}{n} > \frac{1}{n}$; B 错误, 对无穷多个正数 ϵ 是不够的, 重要的是对任意小的 ϵ 都要满足; C 错误, 取数列 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, 则 $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, 但 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列; D 正确, $\forall n > 0, p > 0$, 有

$$\sum_{k=n}^{n+p} |x_k - x_{k+1}| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{n-1}$$

所以对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max\{2, \lceil \frac{1}{\epsilon} + 1 \rceil\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, 所以 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。

所以选 D。

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^3 x} \ln(1+t) dt}{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt} = A$$

- A. $\frac{3}{2}$
 B. 1
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 0

解析: 由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^3 x} \ln(1+t) dt}{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^3 x) \cdot 3 \sin^2 x \cos x}{(e^{x^4} - 1) \cdot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5}{2x^5} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当 C

- A. $p < 1$
 B. $p > 1$
 C. $1 < p < 2$
 D. $p > 2$

解析: 该积分存在两个问题点 0 和 $+\infty$ 。要求在两个问题点处都收敛。

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$, 其在 0 附近的积分收敛当且仅当 $p-1 < 1$, 即 $p < 2$ 。

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对数函数远弱于幂函数, 推测其敛散性与 $\frac{1}{x^p}$ 相同, 即 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散。下面进行严格证明。

当 $p > 1$ 时, 当 x 充分大时, 有 $\ln(1+x) < x^{\frac{p-1}{2}}$, 所以 $\frac{\ln(1+x)}{x^p} < \frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$, 其在 $+\infty$ 附近的积分收敛。由比较判别法可得原积分在 $+\infty$ 附近的积分收敛。

当 $p \leq 1$ 时, 当 x 充分大时, 有 $\ln(1+x) > 1$, 所以 $\frac{\ln(1+x)}{x^p} > \frac{1}{x^p}$, 其在 $+\infty$ 附近的积分发散。由比较判别法可得原积分在 $+\infty$ 附近的积分发散。

综上所述, 原积分收敛当且仅当 $1 < p < 2$, 所以选 C。

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 A

- A. $K > M > N$
 B. $M > K > N$
 C. $M > N > K$
 D. $K > N > M$

解析: 首先计算 M , 有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$, 其中 $\frac{2x}{1+x^2}$ 是奇函数, 在该区间内的积分为 0, 所以 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi$ 。

然后估计 N 和 K , 易得 $\frac{1+x}{e^x} < 1 < 1 + \sqrt{\cos x}$, 所以 $N < M < K$ 。

所以选 A。

5. 下列结论正确的是 B。

- A. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值。
 B. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界。
 C. 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有原函数。
 D. 若 f 在 $[a, b]$ 上有原函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。

解析: Riemann 积分研究的对象是有界函数, 所以如果 Riemann 可积, 则必然有界, 所以 B 正确; 有界函数不一定有最大值和最小值, 所以 A 错误; 有原函数的函数不一定有界, 自然就不一定 Riemann 可积, 例如 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其有原函数

$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 但 $f(x)$ 在 0 附近无界, 所以在包含 0 的区间上不可积, 所以 D

错误；Riemann 可积的函数不一定有原函数，例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，其只有一个间断点，所以可积，但该间断点是第一类间断点，其不可能是某个函数的导数，所以没有原函数，所以 C 错误。

所以选 B。

注：关于可积性和原函数的关系，我们只有一条结论，即微积分基本定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，并且 $f(x)$ 有原函数。除此之外，可积性和原函数的存在性没有必然联系。

6. 设函数 $f(x)$ 可导， $f(0) = 2$ ，且 $f'(x) < 2f(x)$ ，则 D

- A. $f(-1) > 2$
- B. $f(-1) < \frac{2}{e^2}$
- C. $f(1) > 2e^2$
- D. $f(1) < 2e^2$

解析：令 $g(x) = e^{-2x}f(x)$ ，则 $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，所以 $g(-1) > g(0) > g(1)$ ，所以 $f(-1) > 2e^{-2}$ ， $f(1) < 2e^2$ 。

所以选 D。

注：这个构造是如何来的呢？考虑 $f'(x) = 2f(x)$ 的解是 $f(x) = Ce^{2x}$ ，那么如果我们令函数 $g(x) = e^{-2x}f(x) = C$ ，则 $g'(x) = 0$ 。所以这个 $g(x)$ 的导数信息很可能反映 $f'(x) - 2f(x)$ 的信息。

7. 已知 $f \in C^2[-1, 1]$ ， $f''(x) > 0$ ，且 $f(-1) + f(1) = 0$ ，由此不能得到的结论是 B

- A. $\exists \xi \in [-1, 1]$ ，使得 $f(\xi) = 0$ 。
- B. $\exists \xi \in [-1, 1]$ ，使得 $f'(\xi) > 0$ 。
- C. $f(0) < 0$ 。
- D. $\int_{-1}^1 f(x)dx < 0$ 。

解析： $f(-1) + f(1) = 0$ ，所以 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 要么异号，要么同为 0，无论哪种情况都能得到 $\exists \xi \in [-1, 1]$ 使得 $f(\xi) = 0$ ，所以 A 正确；由于 $f''(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 是一个下凸函数，由下凸函数的定义，可得 $f(0) = f\left(\frac{-1+1}{2}\right) < \frac{f(-1)+f(1)}{2} = 0$ ，所以 C 正确；同样， $f(x)$ 的图像会在

$(-1, f(-1))$ 和 $(1, f(1))$ 连成的线段下方，所以 $\int_{-1}^1 f(x)dx < \int_{-1}^1 \frac{f(-1)+f(1)}{2}dx = 0$ ，所以

D 正确；B 错误，考虑恒单调递减的下凸函数，例如 e^{-x} ，就可以构造反例 $f(x) = e^{-x} - \frac{e + e^{-1}}{2}$ ，满足题设条件，但其导数在区间内始终小于 0。

所以选 B。

二、填空题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n}) = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$

解析：构造黎曼和

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1)\end{aligned}$$

注：在微积分 1 的下半学期能遇到这种含求和式的极限，九成可能就是要准备凑定积分定义。基本的原理是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})) = \int_0^1 f(x) dx$ 。

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{\pi}{2} - 1.$

解析：分母的二次根式 $\sqrt{1+x^2}$ 和分子的 $\arctan x$ 都让人想做三角换元 $x = \tan t, (t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2})$ ，有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt \\ &= t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

10. 已知曲线段 Γ 在极坐标系下的方程为 $r = e^\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)，则 Γ 的弧长为 $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

解析：

$$\begin{aligned}L &= \int_0^\pi \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi e^\theta d\theta \\ &= \sqrt{2}(e^\pi - 1)\end{aligned}$$

11. 已知 $f(x) = e^x \sin x$ ，则 $f'''(0) = 2$ 。

解析：直接求导也能做，用泰勒也能做，二者速度差异不大，这里就复习下泰勒。

$$e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

所以 $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}$ ，所以 $f'''(0) = 2$ 。

12. 已知 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = \int_{\sin x}^x \ln(1+t)dt$ 与 x^p 是同阶无穷小量，则 $p = 4$ 。

解析：

$$\begin{aligned}f'(x) &= \ln(1+x) - \ln(1+\sin x) \cos x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{4x^3} = \frac{1}{6}$, 由洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{4x^3} = \frac{1}{6}$, 所以 $f(x)$ 与 x^4 是同阶无穷小量, 所以 $p = 4$ 。

13. 微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解为 $y = e^{2x}$ 。

解析: 令 $p = y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入原方程得:

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

解方程得 $p = Cy$ 。由初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 得 $p(1) = 2$, 所以 $C = 2$, 即 $p = 2y$ 。因此有 $\frac{dy}{dx} = 2y$, 解得 $y = Ce^{2x}$, 由初始条件 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$, 因此特解为 $y = e^{2x}$ 。

三、解答题

14. (13 分) 设函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 。

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点和极值;
- (3) 求 $f(x)$ 的拐点, 以及上凸和下凸区间。

解析:

- (1) 先找垂直渐近线: 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$, 所以有渐近线 $x = 1$;
再找水平/斜渐近线: 计算渐近线斜率:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$$

再求渐近线截距:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 2$$

所以有斜渐近线 $y = x + 2$ 。

(2) $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, 分析各段导数的符号, 有:

- 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增;
- 当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减;
- 当 $x > 3$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增。

由此得到, $f(x)$ 在有极小值点 $x = 3$, 极小值为 $f(3) = \frac{27}{4}$ 。

(3) $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$, 分析各段二阶导数的符号, 即可得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上上凸, 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上下凸, 拐点为 $(0, f(0)) = (0, 0)$ 。

15. (10 分) 已知 $f(t) = \int_0^\pi |t - \sin x| dx$, 求 $f'(t)$ 的表达式, 并求 $f(t)$ 的最小值。

解析: 首先考虑去绝对值, 所以分情况讨论:

当 $t \leq 0$ 时, $|t - \sin x| = \sin x - t$, 所以 $f(t) = \int_0^\pi (\sin x - t) dx = 2 - \pi t$, 所以 $f'(t) = -\pi$;

当 $t \geq 1$ 时, $|t - \sin x| = t - \sin x$, 所以 $f(t) = \int_0^\pi (t - \sin x) dx = \pi t - 2$, 所以 $f'(t) = \pi$;

当 $0 < t < 1$ 时, $t = \sin x$ 有两个解 $x_1 = \arcsin t$ 和 $x_2 = \pi - \arcsin t$, 所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{x_1} (t - \sin x) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\sin x - t) dx + \int_{x_2}^{\pi} (t - \sin x) dx \\ &= 2tx_1 - 2tx_2 + 2\cos x_1 - 2\cos x_2 + \pi t - 2 \\ &= 4t \arcsin t + 4\sqrt{1-t^2} - \pi t - 2 \end{aligned}$$

所以 $f'(t) = 4 \arcsin t - \pi$ 。

$$\text{综上, } f'(t) = \begin{cases} -\pi, & t < 0 \\ 4 \arcsin t - \pi, & 0 < t < 1 \\ \pi, & t > 1 \end{cases}$$

令 $f'(t) = 0$, 解得 $t = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 而当 $t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f'(t) < 0$, 当 $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f'(t) > 0$, 所以 $f(t)$ 在 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值, 最小值为 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2$ 。

16. (8 分) 记平面有界区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体为 Ω . 求 Ω 的体积与侧面积.

解析: 体积:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (2\sqrt{x})^2 dx \\ &= 4\pi \int_0^1 x dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

侧面积:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{1 + (2\sqrt{x})'^2} dx \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+1} dx \\ &= \frac{8\pi}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) \end{aligned}$$

17. (8 分) 求广义积分的值 $\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{x(x+1)(x^2+1)}$.

解析: 先做有理分式分解, 设:

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

通分后待定系数, 解得 $A = -1, B = 1, C = 0, D = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{x(x+1)(x^2+1)} &= \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + \arctan x \Big|_1^{+\infty} \\ &= (0 + \frac{\pi}{2}) - (\ln 2 + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln 2 \end{aligned}$$

18. (12 分) 设函数 $f(x)$ 可导, $f(0) = \frac{1}{3}$, 且满足方程:

$$f'(x) + 2f(x) + \int_0^x f(t)dt = -3(x+1)e^{-x} + \frac{5}{3}$$

求 $f(x)$.

解析: 由等式中其它部分均可导, 所以 $f'(x)$ 也可导. 对等式两边求导得到:

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 3xe^{-x}$$

这是一个二阶非齐次常系数线性微分方程, 首先求对应齐次方程 $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ 的通解, 特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 解得 $r = -1$ 是重根, 所以齐次方程的通解为 $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.

再求非齐次方程的一个特解, 观察右边, 由于 -1 是原方程的二重根, 所以设特解为 $y_p = x^2(Ax + B)e^{-x}$, 代入方程解得 $A = \frac{1}{2}, B = 0$, 所以特解为 $y_p = \frac{1}{2}x^3e^{-x}$. 所以原方程的通解为 $f(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^3e^{-x}$.

二阶方程解的确定需要两个初始条件. 在原等式中令 $x = 0$, 得到 $f'(0) + 2f(0) = -3e^{-0} + \frac{5}{3}$, 所以 $f'(0) = -2$, 结合 $f(0) = \frac{1}{3}$, 得到 $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = -\frac{5}{3}$, 所以 $f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}x^3\right)e^{-x}$.

19. (10 分) 记初值问题 $\frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, y(0) = 1$ 的解为 $y = \varphi(x)$.

(1) 求 $\varphi(x)$;

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n\varphi(x)}{(nx)^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$.

(1) **解析:** 这是一个一阶非齐次线性微分方程, 使用常数变易法 (或直接使用公式), 得到其通解为 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + e^{x^2}$, 由初始条件 $y(0) = 1$ 得 $C = 0$, 所以 $\varphi(x) = e^{x^2}$.

(2) **思路:** 在做这个题目前, 首先我们来分析一下这个积分的极限为什么应该是 $\frac{\pi}{2}$. 先看看

被积函数 $\frac{ne^{x^2}}{(nx)^2 + 1}$, 当 n 很大时, 对于大部分不在 0 附近的 x , $(nx)^2$ 会非常大, 被积函数将非常接近 0. 所以整个积分的值主要受影响于 0 附近的区域. 而当 x 在 0 附近时, $e^{x^2} \approx 1$, 所以被积函数近似为 $\frac{n}{(nx)^2 + 1}$, 其在 $[0, 1]$ 上的积分为 $\arctan n$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 所以这个极限确实应该是 $\frac{\pi}{2}$. 下面我们把这个想法变成一个严格的证明.

解析 (区间分段法): 按照上面的思路, 我们进行区间分段. 一般先转化为证明一个式子的极限是 0, 根据上面的分析, $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{(nx)^2 + 1} dx$, 因此只需要证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n(\varphi(x) - \varphi(0))}{(nx)^2 + 1} dx = 0$$

设 $\delta > 0$, 我们将原积分分成两部分 $\int_0^\delta + \int_\delta^1$. 对于第一部分, 由于 $\varphi(x)$ 在 0 处连续, 所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in [0, \delta]$ 时, $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$, 从而:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta \frac{n(\varphi(x) - \varphi(0))}{(nx)^2 + 1} dx \right| &\leq \int_0^\delta \frac{n|\varphi(x) - \varphi(0)|}{(nx)^2 + 1} dx \\ &< \int_0^\delta \frac{n\varepsilon/\pi}{(nx)^2 + 1} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{\pi} \arctan(nx) \Big|_0^\delta < \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

取定该 δ 后, 对于第二部分, 由于 $\varphi(x) - \varphi(0)$ 在 $[\delta, 1]$ 上连续, 所以有界, 设其上界为 M , 则

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^1 \frac{n(\varphi(x) - \varphi(0))}{(nx)^2 + 1} dx \right| &\leq \int_{\delta}^1 \frac{n|\varphi(x) - \varphi(0)|}{(nx)^2 + 1} dx \\ &\leq M \int_{\delta}^1 \frac{n}{(nx)^2} dx \\ &= \frac{M}{n} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \end{aligned}$$

因此, 当 $n > \frac{2M}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right)$ 时,

$$\left| \int_0^1 \frac{n(\varphi(x) - \varphi(0))}{(nx)^2 + 1} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n(\varphi(x) - \varphi(0))}{(nx)^2 + 1} dx = 0$, 原结论得证。

注: 由上面的证明过程可以看出, 本题的结论与 $\varphi(x)$ 表达式到底是什么其实没有关系。上面是微积分 1 中关于积分的极限常用的通法, 此外下面给出另一种做法。

另解 (直接夹逼): 由 $f(x) = e^x$ 在 $[0, 1]$ 上是一个下凸函数, 所以对于 $x \in [0, 1]$, 有 $e^x \leq e^0 + (e^1 - e^0)x = 1 + (e - 1)x$, 换成 e^{x^2} , 有 $e^{x^2} \leq 1 + (e - 1)x^2$, 而又显然有 $e^{x^2} \geq 1$, 所以对于 $x \in [0, 1]$, 有 $1 \leq e^{x^2} \leq 1 + (e - 1)x^2$, 所以

$$\int_0^1 \frac{n}{(nx)^2 + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{(nx)^2 + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{n(1 + (e - 1)x^2)}{(nx)^2 + 1} dx$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{n}{(nx)^2 + 1} dx &= \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \int_0^1 \frac{n(1 + (e - 1)x^2)}{(nx)^2 + 1} dx &= \arctan n + (e - 1) \frac{n - \arctan n}{n^2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以由夹逼定理, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n\varphi(x)}{(nx)^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

四、附加题解析

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \sin x_n$, $y_{n+1} = y_n^2$ ($n \geq 1$), 且 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$. 求证: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量。

思路: x_n 和 y_n 都是要趋于 0 的, 而 $\sin x_n \sim x_n$, 所以 n 很大时, $x_{n+1} \approx x_n$, 而 $y_{n+1} = y_n^2$, 所以 y_n 的衰减速度肯定是远快于 x_n , 因此 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量。接下来就只要对 x_n 的衰减速度进行一个估计就可以了。

解析: 首先证明 x_n 和 y_n 都趋于 0。易得两数列单调递减且有下界 0, 所以极限存在。分别设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则由递推关系式两边取极限可得 $a = \sin a$ 和 $b = b^2$, 解得 $a = 0$ 和 $b = 0$ 。所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 。

下面证明 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量。当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 由 $\sin x$ 的上凸性, 可得 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$,

所以 $x_{n+1} = \sin x_n > \frac{2}{\pi} x_n$ 。所以：

$$\begin{aligned} x_n &> \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \\ y_n &= y_1^{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \\ 0 &< \frac{y_n}{x_n} < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

由夹逼定理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ ，所以 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量。

注：顺便给出有关 x_n 的一个更精确的估计。首先进行估计，由于 $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ ，所以当 n 很大时， $x_{n+1} \approx x_n - \frac{x_n^3}{6}$ ，所以 $\frac{1}{x_{n+1}^2} \approx \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3}$ ，所以 $\frac{1}{x_n^2} \approx \frac{n-1}{3} + C$ ，其中 C 是常数，所以 $x_n \approx \sqrt{\frac{3}{n}}$ 。

然后可以使用 Stolz 公式严格证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n^2} = 3$ ，所以当 n 很大时，有 $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ 。当然这个估计对本题来说有点过头了（因为本题实在太松了，怎么放都能做），但也算是一个很有意思的分析了。

结论就是，可以证明，对递推关系 $x_{n+1} = x_n - ax_n^k + o(x_n^k)$ ，有 $x_n \sim \sqrt[k-1]{\frac{1}{a(k-1)n}}$ 。