

习题2.5.

2-(2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ 而 } f(x_0) = 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

2-(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} (1 - e^{\frac{x}{x-2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{x-2}} - 1}{\frac{x}{x-2}} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (1 - e^{\frac{x}{x-2}}) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} (1 - e^{\frac{x}{x-2}}) \rightarrow -\infty \quad f(x) \text{ 在 } x_0 = 2 \text{ 处右极限不存在.}$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处连续, 在 $x_0 = 2$ 处不连续.

3-(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2(1+\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})} = 1$$

若要 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} f = f(0)$

$$\text{则 } f(0) = 3 + a = 1 \Rightarrow a = -2$$

即 $a = -2$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 而显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 连续, 即 $a = -2$

4-(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sin 0 - 2 = -2 \quad f(0) = b \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b, \text{ 则 } b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2' + 1 = 3 \quad f(1) = a + b \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b, \text{ 则 } a + b = 3$$

$$\text{即 } a = 5, b = -2.$$

习题2.6

2.

$$\text{令 } f(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \dots + a_{2m-1} x + a_{2m}$$

$$\text{则 } f(0) = a_{2m} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2m} \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2m}}{x^{2m}} \right) \text{ 趋于正无穷.}$$

即 $\exists x_1 > 0, f(x_1) > 0$

同理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 趋于正无穷, 即 $\exists x_2 > 0, f(x_2) > 0$.

显然 $f(x)$ 为连续函数, 则由连续函数的零值定理, 必存在两个零点分别位于 $(0, x_1), (x_2, 0)$.

3.

数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$, 不妨设 $\sup\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty} = f(x_p); \inf\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty} = f(x_q)$

则 $n f(x_q) < f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) < n f(x_p)$

即 $f(x_q) < \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} < f(x_p)$

又 $f \in C[x_q, x_p]$ (或 $f \in C[x_p, x_q]$)

由介值定理: $\forall \mu \in (f(x_q), f(x_p)) \exists \xi \in (x_p, x_q)$ (或 (x_q, x_p))

使 $f(\xi) = \mu$, 即 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$.

8.

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x > M, |f(x) - A| < \varepsilon$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$)

不妨取 $\varepsilon = 1$ 则 $\exists M_0 > 0, \forall x > M_0, |f(x) - A| < 1$

所以 $x > M_0$ 时 $A-1 < f(x) < A+1$

$f(x) \in C[a, M_0]$ 则 $f(x)$ 在 $[a, M_0]$ 上有界 M_1 .

取 $P = \max\{M_1, |A-1|, |A+1|\}$ 则 $\forall x \in [a, +\infty) |f(x)| < P$

即 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界。

12.

$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$

又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增.

即 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号

即若 $x_2 - x_1 > 0$ 则 x_n 单增 且 $a \leq x_n \leq b$, 由单调有界收敛定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 存在

同理若 $x_2 - x_1 \leq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 存在.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$ 即 $\xi = f(\xi)$.

习题 5.1

8.

取 $|x-y| < \delta$ 则 $|f(x) - f(y)| \leq L\delta$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \delta_0 < \frac{\varepsilon}{L}$, 当 $x, y \in I, |x-y| < \delta$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$,

即 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

9-(2)

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2(e^\varepsilon - 1)$, 对 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in (2, +\infty)$, 有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \ln \frac{x_1}{x_2} \right| < \left| \ln \left(1 + \frac{\delta}{x_2} \right) \right| < \left| \ln \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \right| < \varepsilon$$

则 $f(x) = \ln x$ 在 $(2, +\infty)$ 上一致连续.

15-(2).

$\forall \delta > 0, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 取 $x_2 = 2\delta, x_1 = \frac{3}{2}\delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \ln \frac{x_1}{x_2} \right| = \ln \frac{4}{3}$$

$\exists \varepsilon < \ln \frac{4}{3}$, 使 $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 下不一致连续.

16.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

由柯西定理 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在.

即充分性得证.

若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在.

令 $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & x = a \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & x = b \end{cases}$ 由 Cantor 定理 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续

则 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

而显然 $\frac{\sin x}{x} \in C((0, 1))$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$ $\therefore y = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 一致连续

补充题: 设 I 是区间, $f \in C(I)$, 若 f 是单射, 证 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ 是连续的.

由已知得, $f \in C(I)$ 且 f 是单射, 则 f 在 I 上严格单增或单减.

若单增, 则有: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 则 $\frac{x_1' - x_2'}{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)} > 0$. 即 f^{-1} 在区间 $f(I)$ 上单增

反证:

假设 $f^{-1}(x)$ 不连续, 则 $\exists x_0 \in I$, x_0 为断点, 使 $f(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) > 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - f(x_0) > 0$.

不妨设前者成立, 则必定存在 $M \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < M < f(x_0)$, 且 M 不位于 $f^{-1}(x)$ 的值域

而 $f^{-1}(x)$ 的值域为 I , 而由 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < M < f(x_0)$ 知 $M \in I$, 产生矛盾, 故假设不成立

同理可知, 单减时结论依然成立.

综上所述, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ 是连续的.

习题 3.1

1-(1)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

1-(2)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2^x - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\frac{1}{2})^x - 1}{x \ln \frac{1}{2}} \cdot \frac{x \ln \frac{1}{2}}{x} = -\ln 2.$$

2-(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{所以不连续.}$$

由命题 3.1.1 的逆否命题可知 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不可导.

3.

$f(x)$ 在 $x=1$ 若可导则连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 即 $a = a+b$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左导数等于右导数, 则 $a x_0 = a$, 则 $a = 2$ 又 $a+b = 2$

综上 $a=2$ $b=0$

5-(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \cdot 1 = 1 \cdot f'(x_0)$$

5-(4)

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h))^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + 1 \right)^{\frac{1}{h} \cdot \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}} = e \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h))^{\frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}} = e \cdot 1^{\frac{1}{f'(x_0)}} = e$$

12.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(b+\varepsilon) - f(b)}{\varepsilon} > 0$$

$$\text{即 } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)}{h} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(b+\varepsilon)}{\varepsilon} > 0 \quad \text{则 } f(a+h) \cdot f(b+\varepsilon) < 0$$

即 $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$ $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, 由连续函数的零值定理

$f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点。

习题 3.2

2-(1)

$$y' = 3x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - (-3)x^{-4} = 3x^2 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{x^4}$$

2-(3)

$$y = (x^3 - x^2 + x - 1)(3 - x^3)$$

$$y' = (3x^2 - 2x + 1)(3 - x^3) + (x^3 - x^2 + x - 1)(-3x^2) = -6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 6x + 3$$

2-(5)

$$y' = \frac{\tan x \cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{1}{x \cos^2 x} - \frac{\tan x}{x^2}$$

4-(1)

$$y' = 2 \cos 3x \cdot 3 = 6 \cos 3x$$

4-(3)

$$y' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot x^2$$

5-(1)

$$(f(-x))' = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x)$$

5-(2)

$$\begin{aligned} [f(\sin^2 x) f(\cos^2 x)]' &= (f(\sin^2 x))' f(\cos^2 x) + f(\sin^2 x) (f(\cos^2 x))' \\ &= f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos^2 x) + f(\sin^2 x) \cdot f'(\cos^2 x) \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

6-(3)

$$y = e^{\frac{1}{x} \ln x} + e^{\ln x \ln(1-x)}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right) + e^{\ln x \ln(1-x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(1-x) + \ln x \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x^3} (1 - \ln x) + x^{\ln(1-x)} \left(\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x}\right)$$

6-(5)

$$y = e^{\ln(\ln x) \sin x}$$

$$y' = e^{\ln(\ln x) \sin x} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \sin x + \ln(\ln x) \cos x \right)$$

$$= (\ln x)^{\sin x} \cdot \left[\frac{\sin x}{x \ln x} + \ln(\ln x) \cos x \right]$$