

线性代数 梁鑫

三教 2302 Mon. 8:00 Wed. 13:30

对健康、未来负责；好好学习；
4hrs 睡眠；三省吾身；和自己比；
每天都有长进，对社会负责；不怕

15h / 周 10h / 周 学习时间
学习、成绩都OK 底线 (成绩OK)

“水滴石穿”毅力

9.18 预备知识

1. 逻辑和集合

命题

如果 A, 那么 B

若 A, 则 B

$A \Rightarrow B$ 假

真

充分 真

真

必要 假

假

条件

结论

$B \Rightarrow A$

$A \Leftrightarrow B$ 充要 / 等价

$A \text{ 且 } B \quad A \cap B$

$A \text{ 或 } B \quad A \cup B$

非 A $\neg A$

量词

存在 $\exists$

全称 $\forall$

元素 $\in$ 集合

“元令之外” ① 明确判断

② 互不相同

存而不问

子集 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$

$A = B \Leftrightarrow \forall A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$

交集 $A \cap B = \{a | a \in A, a \in B\}$

并集 $A \cup B = \{a | a \in A \text{ 或 } a \in B\}$

补集 $C_S A = \{a \in S | a \notin A\}$
 $S \setminus A$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ 实数集

$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$

2. 证明法

① 直接证明法

② 间接

1) 反证法

命题: $\sqrt{2}$ 是无理数

证: 反设 $\sqrt{2}$ 是有理数

M2: 且 p, q 互素
 $\exists p, q$ 使 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
 $\in \mathbb{Z}, q \neq 0$

p, q 有公因子 2 $p^2 = 2q^2$ 则 p 为偶

矛盾 $\Leftarrow 4 \cdot (\frac{p}{2})^2 = 2q^2$ 则 q 为偶

$\dots$ 直至 p, q 总有至少一个为奇, 矛盾. 原命题成立

2> 数学归纳法 (针对 $\mathbb{N}$ 变量)

步骤: 1. 证明 $P(1)$ 成立

(第一) 2. 若 $P(k) \rightarrow P(k+1)$ 井
 $\Rightarrow P(n)$ 成立 $\forall n \in \mathbb{N}$

(第二) 1. 证明 $P(1), \dots, P(k_0)$ 成立

2. 若 $P(1)$ 成立, 则 $P(k+1)$ 成立
 $1 \leq k$

命题: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

证: 1> $n=1$ 时 $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \checkmark$

2> 若 $n=k$ 时 成立

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

$$(n=k+1 \text{ 时成立}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

#

3. 映射

定义: 给定集合 X, Y , 若 $\forall x \in X$.

都 $\exists$ 唯一 Y 与之对应, 则称 X 到 Y 的一个映射

-对- $\checkmark$

-对多 $\times$

多对- $\checkmark$

多对多 $\times$

映射

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

X 定义域

Y 陪域

f 法则

$f(x) \in Y: x$ 的像

x 称为 $f(x)$ 的像

$\{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ 称为像集 (值域)

$$\text{id}: X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

恒同映射

映射相等:

$$\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & & \sin x \end{matrix}$$

1. 定义域相同

2. 陪域相同

$$\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \sin x \\ x & & \end{matrix}$$

3. 法则相同

单射: 1对1 $\forall x_1, x_2$
 $f(x_1) \neq f(x_2)$

满射: $f(X) = Y$

双射: 单 & 满

可逆: $f: X \rightarrow Y \exists Y \rightarrow X$
 $x \mapsto f(x) \quad f(x) \mapsto x$

f^{-1} 逆映射

HW:

$$0.2 \quad 1.4$$

$$0.3 \quad 1-3.5.8-10$$

9.20

"Problems in Linear Algebra & Matrix Analysis"

定义 1> 良定义?

2> 存在?

5> 运算?

3> 多少?

6> 运算法则?

4> 相等?

定义 (复合 (乘法))

$$\text{对: } f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z$$

定义 f 与 g 的复合: $h: X \rightarrow Z$

记为 $h = g \circ f = gf$ $x \mapsto g(f(x))$
 $gf(x) = g(f(x))$

结合律:

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1 = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$$

Review:

单射: $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

满射: $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$

双射: 单且满

逆映射: $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$
 $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ } $\rightarrow$ 称 f^{-1} 为 f 的一个逆映射
 逆映射若有, 则唯一

$$\begin{array}{c} \downarrow F \\ f_1 \xrightarrow{\quad} f_2 \\ \uparrow l_1 \quad \uparrow l_2 \\ l_1 + l_2 = \text{id} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} F = f_1 + f_2 \\ F l_1 = f_2 l_1 \\ F l_2 = f_1 l_2 \\ f_1 l_1 = f_2 l_2 \end{array} \right.$$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $F \longmapsto \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}F \end{bmatrix}$

所有 m 维向量组成的集合称为 $\mathbb{R}^m$

其中 $x_1 \dots x_m$ 都称为第 i 个分量

定义向量: 一个 m 元有序数组 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ 称为一个 m 维向量

两个向量相等 $\Leftrightarrow$ 对应分量都相等

$\mathbb{C}^m, \mathbb{Q}^m \dots$ 向量常用表示 $\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}$

叠加原理: 1> 可加性

2> 齐次性 (乘法)

定义 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}$

数乘 $k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_m \end{bmatrix}$ } 统称线性运算

带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$ 称为“线性空间 $\mathbb{R}^m$ ”

命题: 向量的线性运算满足如下八条运算法则:

(1) 加法结合律

(2) 加法交换律 $(a+b)+c = a+(b+c)$

(3) 存在零向量 $\exists \vec{0}, \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(4) 存在负向量 $\forall \vec{a} \exists \vec{b} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}$ s.t. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$
 记 $\vec{b} = -\vec{a}$

(5) 数乘结合律

$$k(la) = (kl)a$$

(6) $1 \cdot a = a$ $(k+l)a = ka + la$

(7) 分配律 $l(a+b) = la + lb$

(8) 分配律 $k(la+lb) = k(la) + k(lb)$

叠加原理: 1> 可加性

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

2> 齐次性 (乘法)

$$kf(x) = f(kx)$$

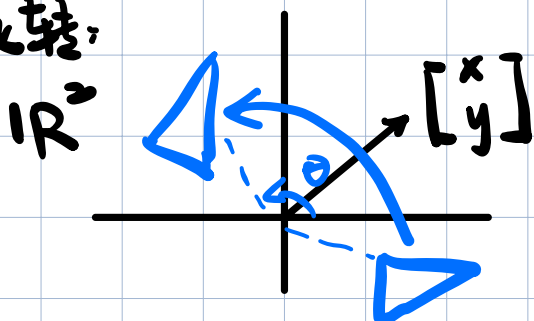
定义 (线性映射):

映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 若满足 1> 2>; 称 f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性映射

$$1> \& 2> \Leftrightarrow f(kx + ly) = k f(x) + l f(y)$$

保持线性运算的映射

旋转:



$$P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{x^2+y^2} \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$f(P) = \sqrt{x^2+y^2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

是线性映射

HW: 1-3. 5. 8-12

9.25

线性空间: $\begin{cases} \text{向量: 有序数组} \\ \text{线性运算} \end{cases} \begin{cases} + \text{与数乘} \\ \text{8条运算法则} \end{cases}$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$a^T = [a_1 \dots a_m]$$

线性映射:

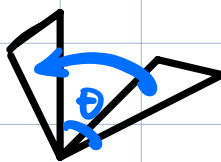
线性空间之间保持线性运算的映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = kf(x)$$

e.g.

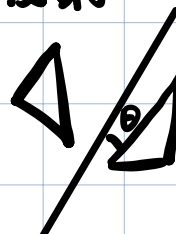
旋转



$$R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

反射



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

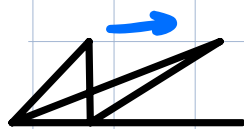
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

伸缩

$$C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

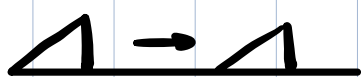
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

错切: $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$$

不是线性映射: e.g. 1
平移 T



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+k \\ y+1 \end{bmatrix}$$

e.g. 2

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^2+y^3}$$

齐次 ($\neq k$)
不可加

e.g. 3

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \mapsto z + \overline{w}$$

可加
不齐次

$$(* k \in \mathbb{C} \quad kz + \overline{k\overline{w}} \neq k(z + \overline{w}))$$

e.g. 4

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sin x \cos y$$

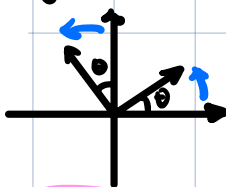
不可加
不齐次

考虑一个问题: 如何确定一个映射?

e.g. 旋转

$$P_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$P_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} P_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= P_\theta (x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= x \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

★ Question:

线性映射 f

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = x_1 f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_2 f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dots + x_n f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

令 $\mathbb{R}^n$ 中的标准坐标向量 $\vec{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$x = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

线性映射: $f(x) = x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{论证其存在. 唯一性}$$

唯一性:

命题: 对线性映射 f, g :

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若 $f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i), i=1, 2, \dots, n$

则 $f(x) = g(x), \forall x \quad (f=g) \quad \checkmark$

Proof:

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = f(x_1 \vec{e}_1) + \dots + f(x_n \vec{e}_n)$$

$$= x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1 g(\vec{e}_1) + \dots + x_n g(\vec{e}_n) = g \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

$$\forall x \in \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

存在性:

命题: 给定 $\mathbb{R}^m$ 中 n 个向量 a_1

$\dots a_n$, 则存在线性映射 f :

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(e_i) = a_i$, $i=1 \dots n$

Prove: 构造

定义 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

验证: 1° 是映射

2° 是线性映射

3° $f(e_i) = a_i$

命题成立 *

推论: 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的 n 个向量 a_1

$\dots a_n$, 则存在唯一的线性映射:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

($m \times n$ 个数确定一个映射) *

定义: 1° 线性组合: 给定向量组

$a_1 \dots a_n$ 与一组数 $k_1 \dots k_n$, 称 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$ 是 $a_1 \dots a_n$ 的一个线性组合

2° 给定向量组 $a_1 \dots a_n$ 和向量 b ,

若存在 $k_1 \dots k_n$ 使得 $b = a_1 k_1 + \dots + k_n a_n$, 则称 b 被 $a_1 \dots a_n$ 线性表示

(若 b 是 $a_1 \dots a_n$ 线性组合, 则 b 被 $a_1 \dots a_n$ 线性表示)

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

记 $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 为 $m \times n$ 矩阵 $\mathbb{R}^{m \times n}$

$$= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \quad \vec{a}_i \text{ 为列向量}$$

$$\vec{a}_1^T = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$$

$\vdots$

$$\vec{a}_m^T = [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]$$

$\vec{a}_i^T$ 为行向量

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n \right\}$$

$$A \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot x$$

是双射

A 称为线性映射, $x \mapsto Ax$ 的表示矩阵

定义(矩阵乘法):

$$\text{对 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\text{定义 } Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Id: } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto x$$

$$[f(e_1) \dots f(e_n)] = [e_1 \dots e_n]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

单位矩阵/恒同矩阵

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

对角矩阵

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

上三角矩阵

$u_{ii}=1$ 单位上三角
 $u_{ii}=0$ 严格上三角

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ u_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵

单位 $\sim$
严格 $\sim$

HW:

1-2, 4-7, 9-10

9.27

线性组合. 线性表示 f 的表示矩阵

$A = [f(x_1) \dots f(x_n)]$

$$(A) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[a_1 \mid \dots \mid a_n] \quad a_i \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{bmatrix} \quad \tilde{a}_i^T \in \mathbb{R}^m$$

矩阵向量乘法:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

相等:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

$$A(k\vec{x}_1 + k\vec{x}_2) = k(A\vec{x}_1) + k(A\vec{x}_2)$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto x \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{解法: 回代法} \uparrow$$

L : 解法: 前代法

$$D: \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad \dots$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \quad \dots$$

即 $\nabla \square$ 包含解了

Q: 一般情况?

例1: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 = 22 \end{cases}$
 系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}$ 右端项

加減消元法: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 8 \\ 2 & 4 & | & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 8 \\ 0 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_2 = 6 \end{cases}$
 $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ back-sub

- ① 一行加另一行的若干倍 $\sim$ 倍加 $\sim$ 倍加行变换
- ② 一行乘非零数 $\sim$ 倍乘 $\sim$ 倍乘行变换
- 例2: ③ 换行的位置 $\sim$ 对换 $\sim$ 对换行变换

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$ “初等变换是”
* 可逆的”

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ 无解

例3: $\begin{cases} 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ 无穷解
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$ ✓

通解为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 - 2 \\ x_3 = -\frac{x_4}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$

x_2, x_4 自由变量 x_1, x_3 主变量

$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & | & x \\ P & + & x & x & x & | & x \\ & & P & x & x & | & x \end{bmatrix}$

命题: 初等变换不改变线性方程组的解; Proof: 任取变换前方程组

$Ax = b$ 的解 k , 则 $Ak = b$. 对

变换后

方程组

$\tilde{A}x = \tilde{b}$

有 $\tilde{A}k = \tilde{b}$

即 k 是 $\tilde{A}x = \tilde{b}$ 的解,

$\therefore \{x | Ax = b\} \subseteq \{x | \tilde{A}x = \tilde{b}\}$

逆变换满足 $\{x | \tilde{A}x = \tilde{b}\} \subseteq \{x | Ax = b\}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & x & + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \epsilon & x & + & + \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & x & + & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
主元
x: 非零
+: 任意
阶梯形矩阵

$\Downarrow$ 主列 自由列

$\begin{bmatrix} 1 & + & 0 & + & 0 & + \\ & 1 & + & 0 & + \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$ 行简化
阶梯形
(ref)
fu形至右侧可直读
PV. 答案

n :未知数个数 r :阶梯数=非零行

e.g.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 = -x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

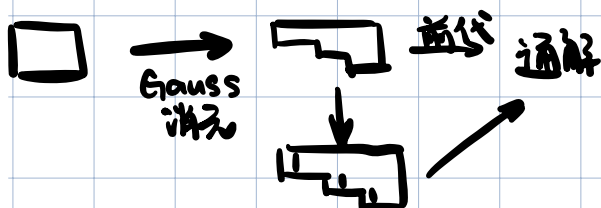
$$= \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_3 + \frac{5}{6}x_5 \\ x_3 \\ \frac{1}{3}x_5 \end{bmatrix} \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

解:

$$\begin{cases} Ax = 0 & \text{齐次} \\ Ax = b & \text{非齐次} \end{cases}$$

1) 齐次 ~ 总有解

2) 齐次 ~ $m < n$ 时无穷多解



Gauss-Jordan 消元法
(矩阵消元法)

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto Ax = y$$

$x \rightarrow y$ 乘法

$y \rightarrow x$ 解方程组

线性映射 (矩阵) 的运算:

1) 加法:

$$A+B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto Ax + Bx$$

e.g.: $f(x) = x$ $g(x) = x+1$ $(f+g)(x) = 2x+1$

= 主元数 = 主列数

2) 数乘:

$$kA: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto kAx$$

矩阵的运算:

$$A+B = [(1A+1B)e_1, (1A+1B)e_2, \dots]$$

$$= [1Ae_1 + 1Be_1, 1Ae_2 + 1Be_2, \dots]$$

$$= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

注: $1A+1B$, kA 是线性映射

线性映射/矩阵 $\leftarrow$ 线性运算有8条法则

3) 乘法

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$AB: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto A(B(x))$$

$$= A(Bx) = ABx \stackrel{?}{=} (AB)x$$

是线性映射 $\checkmark$

$$AB = [(1A1B)e_1, (1A1B)e_2, \dots]$$

$$= \dots = [Ab_1, \dots, Ab_p]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \dots + a_{mn}b_{nj} \end{bmatrix}_{m \times p}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T b_1 & \dots & \tilde{a}_1^T b_p \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_m^T b_1 & \dots & \tilde{a}_m^T b_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{bmatrix}$$

定义: (转置)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(kA + lB)^T = kA^T + lB^T$$

乘法法则:

$$1> (AB)C = A(BC)$$

$$2> \text{不成立}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3> \text{不成立}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

4> 幂

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ 个}}$$

HW: 1.3: 5 (奇), 6, 8, 9, 19 (奇) . 20, 21

1.4: 2, 3 (1-3), 4 (3), 5

13, 16, 18, 19, 22

10.9

Review

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad Ax = b$$

$\text{ref}[A|b]$ 比 $\text{ref}[A]$ 所标的大, 无解

相当: $a > r = n$ 有唯一解;

$b > r < n$ 有无穷多解,

齐次 $\sim Ax = 0$: 零解 (平凡解). 可能有

非齐次 $Ax = b$: 可能无解 非零解

矩阵运算

1> 线性运算: $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$kA + lB = [ka_{ij} + lb_{ij}]_{m \times n}$$

2> 转置 $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

3> 乘法 $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\text{法则: } AB = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p}$$

① 8条

$$② (A^T)^T = A$$

$$③ (kA + lB)^T = kA^T + lB^T$$

$$④ (AB)C = A(BC) \quad \text{不成立, 不成立}$$

$$⑤ (kA + lB)C = kAC + lBC;$$

$$⑥ C(kA + lB) = kCA + lCB$$

$$⑦ (AB)^T = B^T A^T$$

$$(I) (kI) = (kI) \cdot I$$

则称 A 与 B "可交换"

20, 21

$$\text{Proof. } (AB)^T_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$(B^T A^T)_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik} = (AB)^T_{ji}$$

#

$$Ax = b$$

对换:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}A = [P_{ij}Ae_1 \dots P_{ij}Ae_t]$$

倍乘:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k \\ & & & \ddots \end{bmatrix} E_{ii:k} \quad E_{ii:k}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/k \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

倍加:

$$E_{j:k} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{初等行交换} \\ \text{作用于矩阵} \\ \leftrightarrow \text{初等矩阵} \\ \text{乘矩阵} \end{matrix}$$

$$E_t \dots E_1 Ax = E_t \dots E_1 b$$

rref R

线性映射的逆:

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$AB = \text{id } \mathbb{R}^m$$

$$BA = \text{id } \mathbb{R}^n$$

下证 B 为线性映射:

$$B(kx + ly) = kB(x) + lB(y) ?$$

$$A(kx + ly) = kA(x) + lA(y)$$

$$B(A(k\tilde{x} + l\tilde{y})) = B(kx + ly)$$

$$x = A\tilde{x}, u = A\tilde{u}$$

$$kx + ly = B(kx + ly) \quad *$$

定义: 对 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 若存在矩阵

$$B^{n \times m} \text{ s.t. } AB = I_m, BA = I_n$$

则称 B 是 A 的逆 (矩阵)

注: 矩阵逆若存在则唯一. 记 A 的逆为

$$A^{-1}$$

$$AC = I \quad CA = I$$

$$\text{若 } B \neq C, B \neq A^{-1}$$

$$B = BI = BAC = IC = C \text{ 矛盾}$$

若有逆, 则 $m=n$?

$$A \text{ 是单射} \Leftrightarrow (Ax=0 \Rightarrow x=0)$$

$$m < n \Rightarrow \text{无穷解 } x$$

$$\Rightarrow m \geq n$$

$$B \text{ 是单射} \Leftrightarrow n \geq m \Rightarrow m=n$$

$$\textcircled{Q}: \text{满射 } m \leq n \quad \checkmark$$

求逆?

$$AB = I \Leftrightarrow Ab_i = e_i$$

$$[A | e_1] \rightarrow [R | b_1]$$

$$[A | e_2] \rightarrow [R | b_2]$$

$\vdots$

$$\Rightarrow [A | I] \rightarrow [R | B]$$

$$(R=I)$$

10.11

Review

1> 线性运算

2> 转置

3> 乘法

4> 逆

$$(AB)^T = B^T A^T$$

注: 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, 则 $m=n$

初等矩阵

- 对换 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & i & j \\ & & & \ddots \\ & & & & j & i \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = P_{ij} = I - (e_j - e_i)(e_j - e_i)^T$
- 倍乘 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{ii;k} = I + (k-1)e_i e_i^T$
- 倍加 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & k \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{ji;k} = I + k e_j e_i^T$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A^T)^T = (A^T)^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(kA + lB)^T = \text{X}$$

$$(kA)^T = \frac{1}{k} A^T$$

$$(A+B)^T = \text{X}$$

命题: 对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 以下叙述等价:

1> A 可逆

2> 对 $\forall b$, $Ax=b$ 存在唯一解 x

3> $Ax=0$ 有唯一解

4> A 有 n 个主元

5> $\text{ref}(A) = I_n$

6> A 是初等矩阵的乘积

$$\Rightarrow 6: E_t \dots E_1 A = I_n$$

$$\Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_t^{-1}$$

$\Rightarrow 1: \checkmark \therefore 1 \sim 6$ 等价 *

证 A 可逆: 4/5

A 不可逆: 2/3

$$\text{求 } A^{-1}: [A | I]$$

$\downarrow E$

$$[I | A^{-1}]$$

$$[A | C] \xrightarrow{E} [I | D]$$

$$EA = I \quad D = EC = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{bmatrix}^{-1} (d_{ii} \neq 0) = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}^{-1} (u_{ii} \neq 0) = \begin{bmatrix} 1/u_{11} & \dots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{-1} = (\nabla^T)^T = (\nabla^{-1})^T = \Delta \quad (l_{ii} \neq 0) \quad *$$

置换矩阵: 一系列对换矩阵的乘积

对角占优矩阵: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\forall i$
 $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

命题: 对角占优矩阵可逆

证: A 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解

$$\Rightarrow | -a_{ii}x_i | = | a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n |$$

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j|$$

$$\text{取 } i \text{ 为 } |x_i| = \max |x_j| \ (i \neq 1)$$

$$\therefore \text{RHS} \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \cdot |x_i| < |a_{ii}| |x_i|$$

$$\therefore |x_i| = 0$$

$$\therefore \forall p \ x_p = 0 \ x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \dots & B_{rs} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & \dots & A_{r1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & \dots & A_{rs}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \neq -A_{21} A_{11}^{-1}$$

设 A_{11} 可逆

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \text{可逆}$$

A_{11} 在 A 中舒尔补

$\Rightarrow$ Scherman - Morisson - Woodbury Formula:

(SMWF)

$$(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}$$

$$= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} a b^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}$$

$$\Rightarrow (A + \delta e_i e_i^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\delta A^{-1} e_i e_i^T A^{-1}}{1 + \delta e_i^T A^{-1} e_i}$$

$$(A + \delta e_i e_i^T)^{-1} - A^{-1} = * \delta$$

$$k A_{11} + l B_{11} \dots k A_{rs} + l B_{rs}$$

可逆矩阵的邻域(矩阵)也是可逆的

10, 16
Review

Week 5

矩阵运算: 线性运算, 转置, 乘法, 可逆

$$Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$XA=B \Rightarrow X=BA^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A & I \\ B & A^{-1}B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & A^{-1} \\ A^{-1}B & A^{-1}B \end{bmatrix}$$

矩阵分块

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} \\ kA_{21} & kA_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

则可乘

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\rightarrow \text{SMWF: } (A+uDV)^T = A^T - A^T u(D+V^T u)^{-1} V^T A^T$$

$$\text{SM: } (A+uV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uV^T A^{-1}}{1+V^T A^{-1}u}$$

A^{-1} 可逆

$$A+uV^T \text{可逆} \Leftrightarrow 1+V^T A^{-1}u \neq 0$$

$$(I+uV)^{-1} = I - u(I+Vu)^{-1}V$$

$$A=LU$$

$$Ax=b$$

$$\Leftrightarrow L(Ux)=b$$

$$\Leftrightarrow UX=L^{-1}b \text{ (前代)}$$

$$\Leftrightarrow X=U^{-1}(L^{-1}b) \text{ (回代)}$$

命题: 若方阵A仅用向下行变换化为阶梯形, 则存在单位下三角矩阵L和上三角矩阵U, 使得 $A=LU$

矩阵分解

定义: 矩阵的左上角 $k \times k$ 块称为第 k 个顺序主子阵

命题: 若A可逆, 则 $\exists$ 单位 L, U s.t. $A=LU$

$\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子阵皆可逆

Proof: " $\Rightarrow$ " A可逆, L可逆, 故 $U=L^{-1}A$ 可逆

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \text{可逆} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

" $\Leftarrow$ "

对阶数 n 归纳

$n=1$ 显然 $\checkmark$

* 若对 $i-1$ 阶矩阵命题成立

观察 i 阶矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_{i-1} & a_i \\ a_i^T & \alpha \end{bmatrix} \text{ 由归纳假设 } A_{i-1} = L_{i-1}U_{i-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ a_i^T A_{i-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i-1} & a_i \\ 0 & \alpha - a_i^T A_{i-1}^{-1} a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} L_{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} U_{i-1} & L_{i-1}^{-1} a_i \\ 0 & * \end{bmatrix}}_U$$

定义: $A=LU$ 称为A的LU分解

唯一性: 设 $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

由 A, L_1, L_2 可逆, 和 U_1, U_2 可逆

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$$

$$\Downarrow = \Downarrow$$

$$\therefore = I_n \quad \therefore L_2^{-1} = L_1^{-1} \quad U_1^{-1} = U_2^{-1}$$

$$\text{即 } L_1 = L_2, \quad U_1 = U_2 \quad \#$$

$$A = LDU \quad (A = L\tilde{U} = LDU) \\ U = D\tilde{U}$$

$$A = A^T \Rightarrow A = L D L^T \quad (\tilde{U} = L, \quad \tilde{L} = U)$$

$$(A^T = \tilde{U}^T D \tilde{L}^T = L D U \Rightarrow U = L^T)$$

命题: 若 A 可逆, 则有置换矩阵 P

$$L \quad \nabla \quad U \quad \text{s.t.} \quad A = PLU$$

$$\dots \bar{E} \dots \bar{E} P \bar{E} \dots \bar{E} P \bar{E} \dots \bar{E} A = U$$

Proof: 对阶数 n 归纳, 若 $a_{11} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & u_1^T \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

若 $a_{11} = 0$

$\Rightarrow (P, A)_{11} \neq 0$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & u_1^T \\ 0 & P_2 L_2 U_2 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot A = P_2 L U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & u_1^T \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{P_1^{-1} P_2}_P L U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 L_2 \end{bmatrix} \cdot U$$

若 $a_{11} = a_{21} = 0$

则 A 不可逆

矛盾

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} U$$

$$= PLU$$

$$\text{计算量: } A = LU \sim \frac{2}{3} n^3$$

$$\text{矩阵变换: } A \xrightarrow{E} R$$

等价关系

定义 (左相抵):

若 A 经初等行变换变成 B , 则称 A

左相抵于 B

注 $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆 $E, EA = B$

反身性: $a \sim a$

$A \sim A$

对称性: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

传递性: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

HW: 1 (18), 2-4

10.18

Review:

LU分解: $A = L \cdot U$

$$\square \quad \Delta \quad \nabla$$

$A = PLU$

$(PA = LU)$

$$A = LDU$$

$$\square \quad \Delta \quad \nabla$$

$$(A = PLDUQ)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{11}^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A'' \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

定义 (等价关系): 对集合 S 及其上二元关系 $\sim$

若 $\sim$ 满足: (1) 反身性 (2) 对称性

(3) 传递性

则称 $\sim$ 是 S 上的等价关系

注: 等价类, 等价变换, 标准形, 不变量

矩阵分块 $\begin{bmatrix} + \end{bmatrix}$
 矩阵分解 $\begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$
 矩阵变换 $\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$x \mapsto Ax$$

A 是单射: $Ax=0$ 有唯一解 $\Leftrightarrow N(A)=\{0\}$

A 是满射 $\Leftrightarrow \forall b, Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow A(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^m$

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax=b\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

定义: 子空间: 对 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集 M , 若满足

$$1) a, b \in M \Rightarrow a+b \in M$$

$$2) k \in \mathbb{R} \quad a \in M \Rightarrow ka \in M$$

则称 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个(线性)子空间

定义(线性生成): 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $a_1, \dots, a_n$

$$\text{集合} \{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \mid k_i \in \mathbb{R}\} = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$$

是一个子空间, 称为 $a_1, \dots, a_n$ 生成的子空间

定义(线性无关)

给定 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $a_1, \dots, a_n$, 若 $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0$

$\Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$ 则称 $a_1, \dots, a_n$ 线性无关.

否则称为 $a_1, \dots, a_n$ 线性相关

线性相关 $\Leftrightarrow [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0$ 的表示法唯一

$\Leftrightarrow [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow 0$ 被 $a_1, \dots, a_n$ 线性表示的表示法不唯一

定义(基): 对子空间 M 中的向量组 $a_1, \dots, a_n$, 若

$$1) M = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$$

$$2) a_1, \dots, a_n \text{ 无关}$$

则称 $a_1, \dots, a_n$ 是子空间 M 的一组基

$\Leftrightarrow$ 若 M 中任意向量被 $a_1, \dots, a_n$ 唯一线性表示

则 $a_1, \dots, a_n$ 是基

HW. 1. 3. 6-8, 9(11.10(11)), 12. 14-17.

19.20

线性无关: $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$

线性生成: $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \mid k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}\}$

向量组 $a_1, \dots, a_n$ 矩阵 $A = [a_1, \dots, a_n]$ 方程组 $Ax=0$ 线性映射 $x \mapsto Ax$ 子空间

线性无关? $Ax=0$ 仅有零解 单射 $N(A)=\{0\}$

线性生成 $\mathbb{R}^m$? $Ax=b$ 总有解 满射 $R(A)=\mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow R(A) = \mathbb{R}^m$ 平凡子空间: $\{0\}$ 没有基

$\mathbb{R}^m$ 有基 $a_1, \dots, a_m$

$\Leftrightarrow [a_1, \dots, a_m]$ 可逆
($n=m$)

任子空间?

$$R(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_n) ?$$

$$\text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \text{span}(a_1, a_2)$$

定义: 对向量组 $a_1, \dots, a_n$, 若其部分组 $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$

满足 1) $a_1, \dots, a_n$ 被 $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ 线性表示

2) $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ 线性无关

则称 $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ 为 $a_1, \dots, a_n$ 的一个极大线性无关部分组

命题: 设 $a_1, \dots, a_r$ 线性无关

若 $a_1, \dots, a_r, b$ 线性相关, 则 b 可被 $a_1, \dots, a_r$ 线性表示

若 $a_1, \dots, a_r, b$ 线性无关, 则 b 不能被 $a_1, \dots, a_r$ 线性表示

证: 相关 $\Rightarrow$ 表示

$$k_1 a_1 + \dots + k_r a_r + k_{r+1} b = 0, \quad k_i \text{ 不全为 } 0$$

注意 $k_{r+1} \neq 0$ (若 $k_{r+1} = 0$, $k_1 a_1 + \dots + k_r a_r = 0$ 矛盾)

$$b = -\frac{k_1}{k_{r+1}} a_1 - \dots - \frac{k_r}{k_{r+1}} a_r$$

表示 $\Rightarrow$ 相关

$$b = k_1 a_1 + \dots + k_r a_r$$

$$k_1 a_1 + \dots + k_r a_r + (-1)b = 0 \quad \#$$

命题: 不全为 0 的向量组存在极大线性

无关部分组:

证: 利用筛选法, 得极大线性无关组

命题: 如下表述等价:

1) $b_1, \dots, b_n$ 被 $a_1, \dots, a_m$ 表示

2) 存在 $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s.t. $[b_1 \dots b_n] = [a_1 \dots a_m]U$

3) $\text{span}(b_1, \dots, b_n) \subseteq \text{span}(a_1, \dots, a_m)$

定义: 若两向量组可以相互线性表示,

则称两向量组 线性等价

注: 是向量组集合上的等价关系

不变量: $\text{span}(\quad)$

$a_1, \dots, a_m \sim a_i, \dots, a_i, r$
 $b_1, \dots, b_n \sim b_j, \dots, b_j, s$ 下证 $r=s$

命题: 若 $a_1, \dots, a_m$ 被 $b_1, \dots, b_n$ 线性表示, 且 $a_1, \dots, a_m$ 线性无关, 则 $m \leq n$

$\Rightarrow r \leq s, s \leq r \Rightarrow r=s$ #

定义: 向量组的任意一个极大线性无关部分组中向量的个数称为该向量组的秩, 记为 $\text{rank}(\cdot)$, 只含 0 的向量组的秩定义为 0

定理 (基存在定理):

任意 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 M , 若 $M \neq \{0\}$, 则 M 有一组基

证: 取 $a_1 \in M, a_1 \neq 0$

若 $\text{span}(a_1) = M$, 则 a_1 是 M 的一组基

否则存在 $a_2 \notin \text{span}(a_1)$

若 $\text{span}(a_1, a_2) = M$, 则 a_1, a_2 是 M 的一组基

依此类推

由于 M 中向量 $a_1, \dots, a_n$ 总是被 $a_1, \dots, a_m$ 所表示, 若 $a_1, \dots, a_n$ 线性无关, 则 $n \leq m$, 故有终止

此时 $a_1, \dots, a_n$ 是 M 的一组基

定义: 子空间 M 的任意一组基中向量的个数称为该子空间的维数, 记为 $\dim M$

特别地, $\dim\{0\} = 0$

定理 (基扩充定理): 子空间 M 中的线性无关向量组 $a_1, \dots, a_p$ 总可以扩充成 M 的一组基 $a_1, \dots, a_r$

性质: 1) $M \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \dim M \leq m$

2) $M \subset N \Rightarrow \dim M \leq \dim N$

3) $M \subset N, \dim M = \dim N \Rightarrow M = N$

命题: $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto Ax$

1) A 是双射 $\Leftrightarrow A$ 可逆

2) A 是单射 $\Leftrightarrow \exists B$ s.t. $BA = I_n$

3) A 是满射 $\Leftrightarrow \exists B$ s.t. $AB = I_m$

HW: 1, 2, 4-8, 10-15, 18

10.25

向量组

子空间

矩阵

$S = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\text{span}(S) = R(A)$ $A = [a_1, \dots, a_n]$

极大线性无关部分组 基

秩 $\text{rank}(S)$ 维数 $\dim \text{span}(S)$ 秩 $\text{rank}(A)$
 $= \dim R(A)$

例: 求 $a_1, \dots, a_5$ 极大线性无关部分组

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$ $a_1 \neq 0 \checkmark$ 大基!

a_1, a_2 $[a_1, a_2] k=0 \Rightarrow k=0 \checkmark$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$a_1, a_2, a_3: [a_1 \ a_2 \ a_3] k=0 \quad \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1, a_2, a_4: [a_1 \ a_2 \ a_4] k=0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow k=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$a_1, a_2, a_4, a_5 \quad \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\star a_1, a_2, a_4$$

$$\text{新法: } a_1, \dots, a_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①-②, ③-4②, ④-2②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$(k_1 \neq k_3) \times$$

$$(k_2 = k_3) \times$$

$$\rightarrow b_3 = b_1 - b_2, \quad b_5 = -\frac{7}{6}b_1 - \frac{5}{6}b_2 - \frac{1}{3}b_4$$

$$Ax=0 \quad \bar{E}Ax=0$$

$$A \xrightarrow{\bar{E}} B \quad (Bx=0)$$

$$B = \bar{E}A$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1 - a_2, \quad a_5 = \frac{7}{6}a_1 - \frac{5}{6}a_2 - \frac{1}{3}a_4$$

命题: 矩阵的 rref 唯一

行简化阶梯形 $\rightarrow$ 列向量组 极大 ~
列空间 $R(A)$ 基
行空间 $R(A^T)$ 基
行向量组 极大 ~

(额外工作)

定义: $\dim R(A)$ 称为 A 的列秩 $\rightarrow$ rref 中主列数
 $\dim R(A^T)$ 称为 A 的行秩 $\parallel$

$\geq$ rref 中非零行数

命题: $\dim R(A) = \dim R(A^T)$

$\dim R(A)$
 $\dim R(A^T)$ } 称为 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$

性质: $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$ ①

$$r(kA) = r(A) \quad k \neq 0 \quad ②$$

$$r(A^T) = r(A) \quad ③$$

$$r(AB) \leq r(A) \quad ④$$

$$r(AB) \leq r(B) \quad ⑤$$

证: ④, ⑤ 若 $B(A)$ 可逆, $r(AB) = r(A) (r(B))$
证: $r(AB) = \dim R(AB) \leq \dim R(A) = r(A)$

$$r(AB) = r(B^T A^T) = \dim R(B^T A^T)$$

$$\leq \dim R(B^T) = r(B^T) = r(B) \quad \neq$$

定义: 对 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 若 $r(A) = m$, 则称 A 行满秩.
若 $r(A) = n$, 则称 A 列满秩, $r(A) = m = n$ 称 A 满秩

A 列满秩 $\Leftrightarrow A$ 是单射 $\text{证: } Ax=0 \rightarrow x=0$

A 行满秩 $\Leftrightarrow A$ 是满射 $\text{证: } Ax=b \Rightarrow \bar{E}Ax = \bar{E}b$

A 满秩 $\Leftrightarrow A$ 是双射 $\Leftrightarrow A$ 可逆

若 P, Q 皆可逆, $r(PAQ) = r(A)$

$$A \xrightarrow{P} R \xrightarrow{Q} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相抵的
标准形

相抵: 若 A 经过一系列初等行列变换得列矩阵 B , 则称 A 相抵于 B

等价类有 $\min\{m, n\} + 1$ 个

$$[0], [0 \ 0], [0 \ 0 \ 0] \dots [I_m \ 0] \text{ or } [I_n]$$

零空间 $N(A)$ 基?

左零空间 $N(A^T)$ 基?

$$k_1 = -k_3 + \frac{2}{3}k_5$$

$$k_2 = k_3 + \frac{1}{3}k_5$$

$$k_4 = \frac{1}{3}k_5$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}k_3 + \frac{2}{9}k_5 \\ k_3 + \frac{1}{3}k_5 \\ k_3 \\ \frac{1}{3}k_5 \\ k_5 \end{bmatrix} \mid k_3, k_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ k_3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_5 \begin{bmatrix} 2/9 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_3, k_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left(\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/9 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & f_1 & p_3 & f_2 & f_3 \\ e_1 & e_2 & f_2 & e_3 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim N(A) + \dim R(A) = n$$

$$\dim N(A^T) + \dim R(A) = m$$

HW:

201. 3 奇, 4, 8, 9, 12, 15-17, 19.

21, 22, 23 (3, 4), 24

10, 30

$\downarrow$
 R^x

Review:

$$\text{秩 } r(A) = \dim R(A) = \dim R(A^T) = \text{rank}(A)$$

基 极大 ~

$$\text{列空间 } R(A) \quad a_{i1}, \dots, a_{ir} =$$

$$\text{行空间 } R(A^T) \quad \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r \quad (\text{额外工作})$$

$$\text{零空间 } N(A) \quad P \begin{bmatrix} -f_1 \\ e_1 \end{bmatrix}, \dots, P \begin{bmatrix} -f_{n-r} \\ e_{n-r} \end{bmatrix} \times$$

$$\text{左零空间 } N(A^T) \quad ?$$

$$A \xrightarrow{E} B = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & f_2 & e_2 & f_3 & \dots & f_r & e_3 & \dots & e_r & f_{n-r} \end{bmatrix}$$

$$\text{主变量 } \overbrace{x_{r_1} \quad x_{r_2} \quad \dots \quad x_{r_r}}^{\text{自由变量 } x_{j_1} \quad x_{j_2} \quad \dots \quad x_{j_{n-r}}}$$

$$EAP = BP = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 \end{bmatrix}$$

P : 置换

$$Ax = 0 \Leftrightarrow EAP P^T x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T x = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 + F y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = -F y_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & f & & \end{pmatrix}$$

$$x = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -F y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} y_2$$

$$N(A) = \left\{ P \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} y_2 \mid y_2 \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

左零空间 $N(A^T)$?

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} R & E \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 A = 0$$

$$A^T E_2^T = 0 \quad R(E_2^T) \subseteq N(A^T)$$

$$\dim(N(A)) = n - r(A) = m - r \quad \dim(N(A^T)) = m - r(A)$$