

A 卷

考试课程 几何与代数(1) 2005 年 1 月 6 日 下

_____ 系 _____ 班 姓名 _____ 学号 _____

一. 填空题 (将答案填在下面的空格内, 每题 4 分, 合计 32 分)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 B 为 3 阶非零矩阵, 满足 $AB = 0$, 则矩阵 A 的秩 $r(A) = \underline{2}$.2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 则矩阵 AB 的全体特征值为 $\underline{1, -2}$.3. 在 R^3 中, 已知从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵是 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.4. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似, 则 A 的行列式 $|A| = \underline{\quad}$.5. 在直角坐标系中, 已知平面 π 过点 $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, 则与平面 π 垂直且过点 $(1, 1, 1)$ 的直线的对称方程 (标准方程) 是 $\underline{\quad}$.6. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, η_1, η_2, η_3 为 $Ax = b$ 的 3 个解, 已知 $\eta_1 + \eta_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 则 $Ax = b$ 的通解为 $\underline{\quad}$.7. 将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 列与第 3 列交换, 然后将所得矩阵的第 1 列的 -2 倍加到第 2 列, 得到矩阵 B , 则矩阵 $A^{-1}B = \underline{\quad}$.8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 1$ 表示的二次曲面是 $\underline{\quad}$.

二. 计算题 (每题 18 分, 合计 54 分)

9. 设 3 阶实对称矩阵 A 有 3 个特征值 $3, 3, -3$, 已知属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1 = (1, -2, 1)^T$, 求矩阵 A 及 A^{-1} .

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基, σ 是 V 上的线性变换, 已知 $\sigma(\alpha_1) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\sigma(\alpha_2) = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$, $\sigma(\alpha_3) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3$,

(1) 求线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 设由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 向量 γ 在基

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $X = (0, -1, 2)^T$, 求 $\sigma(\gamma)$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

11. 设 n 元 ($n \geq 4$) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + bx_4 + \cdots + bx_n = 0 \\ bx_1 + ax_2 & = 0 \\ bx_1 & + ax_3 & = 0 \\ -bx_1 & & + ax_4 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$

其中 $b \neq 0$. 试讨论 a, b, n 取何值时, 方程组只有零解; 取何值时, 方程组有非零解? 在有非零解时, 写出方程组的基础解系.

三. 证明题 (第 12 题 8 分, 第 13 题 6 分)

12. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, β 是 m 维非零列向量, 已知 β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, 试证明

(1) $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_r$ 线性无关;

(2) $Ax = b$ 的解集合的极大线性无关组含有 $r+1$ 个向量.

13. 设 A 为任意 n 阶实反对称矩阵 (即 $A^T = -A$), 试证明 $I - A^2$ 是正定矩阵.

清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程 代数与几何 2006 年 1 月 5 日 F

姓名: 班级: 学号:

(选择题和填空题答案写在本试题专用纸上, 其他题目的答案写在试卷上)

8:46.

一 (选择题, 每题 3 分)

必要性: $Q^T A Q = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$

$Q^T A^T Q = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow Q^T (A - A^T) Q = 0$

1. 设 A 是一个实对称矩阵, 这一条件是存在可逆矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 为实对角矩阵的 (3) 条件。
 $A = A^T$ 对称.

- (1) 充分但不必要; (2) 必要但不充分;
 (3) 充分必要; (4) 既不充分也不必要.

2. 设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2 B - A - B = E$. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|B| = \underline{(3)}$.
 $(A^2 - E)B = A + E \Rightarrow (A - E)B = E$.
 (1) 4; (2) -4; (3) -1/4; (4) 1/4. $|B| = |A - E|^{-1}$.

3. 设 A 是 3 阶可逆方阵, 将 A 的第一行和 A 的第二行交换得 B , 再把 B 的第二行的 2 倍加到 B 的第三行得 C , 则满足 $QA = C$ 的可逆矩阵 $Q = \underline{(3)}$.

- (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 设 A_i 为 $m \times n$ 矩阵, V_i 为齐次线性方程组 $A_i \bar{x} = 0$ 的解空间, $i=1, 2$. 现有 4 个命题:

- (a) 若 $V_1 \subset V_2$, 则 $r(A_1) \geq r(A_2)$; (b) 若 $r(A_1) \geq r(A_2)$, 则 $V_1 \subset V_2$;
 (c) 若 $V_1 = V_2$, 则 $r(A_1) = r(A_2)$; (d) 若 $r(A_1) = r(A_2)$, 则 $V_1 = V_2$.

以上命题正确的是 (3).

- (1) (a), (b); (2) (b), (d); (3) (a), (c); (4) (c), (d).

二(填空题, 每题 4 分, 注意下列 1-4 题要求填实数).

1. 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ 3\bar{\gamma}_1 \\ 2\bar{\gamma}_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ 均为 3 元行向量,

且 $|A|=12, |B|=3$, 则 $|A-B| = -2$.

$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 和 C 为 $n \times m$ 矩阵, $m < n$, 则分块矩阵的行列

式 $\begin{vmatrix} A^T A & C \\ 0 & B^T B \end{vmatrix} = 0$.

$= |A^T A| \cdot |B^T B| = 0$

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x = 0, y = 1$.

特征值相同.

4. 若 4 阶方阵 A 的特征值分别为 $-1, 1, -2, 2$, 则 $|A^3| + \text{秩}(A) = 68$.

$|A| = \prod_{i=1}^4 \lambda_i$

5. 设 $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}), r(A) = 2, A\bar{X} = \bar{b}$ 的解为 $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3 \text{ 满足})$ (可否不要?)

$\bar{X}_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \bar{X}_2 = (0, 0, 1, 0)^T, \bar{X}_3 = \bar{X}_1 + 2\bar{X}_2$, 则 $A\bar{X} = \bar{b}$ 的通解为

$= (1, 0, 3, 0)^T$

$k_1(1, 0, 0, 0)^T + k_2(0, 0, 2, 0)^T$

$+ (1, 0, 1, 0)^T$

三(计算题)

1. (12 分) 设 $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 X .

$|A| = 1, A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. (16 分)

(1) λ 取何值时, 线性方程组

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & -3 \\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 \\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

无解?

$\lambda \neq 1 \pm \sqrt{5}$

(2) 当 $\lambda = -1$ 时, 求上面方程组的通解.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(-3, 2, 1, 1) + (-3, -3, 1, 0)$

(3) (18分) 空间 $\mathbb{R}^3$ 中两直线方程分别为

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{a},$$

$$L_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-1}{4} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

$$\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0$$

$a=-2, b=-4$ 时 L_1 和 L_2 平行.

(i) 当 a, b 分别为何值时, L_1 和 L_2 平行或相交? $a=10, b=-1$ 时相交.

(ii) 当 a, b 为何值时, L_1 和 L_2 是异面直线? $a \neq -2$ 或 $b \neq -4$ 且 $a \neq 10$ 或 $b \neq -1$ 时.

(iii) 当 $a=b=1$ 时, 求 L_1 和 L_2 之间的距离.

$$\vec{S}_1 = (1, 2, 1), \vec{S}_2 = (-2, 1, 4), L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 的公法线向量 } \vec{n} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = (7, -6, 5).$$

四 (证明题) 设 $A(0, 1, -1), B(1, 2, 1), \therefore \vec{AB} = (1, 1, 2), d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$

1 (12分). 设 A 为 n 阶实矩阵, 且存在某个自然数 p 使得

$$A^{p-1} \neq 0, A^p = 0. (E + A + A^2 + \dots + A^{p-1})E = AFE. \therefore n(E + A + \dots + A^{p-1}) = n.$$

(1) 证明: 存在某个向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}, \dots, A^{p-1}\vec{x}$, 线性无关.

(2) 证明: $A^n = 0$.

2. (10分). 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 且 $A^2 = E_n, r(A + E_n) = m$. 证明:

矩阵 A 与矩阵 $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}$ 相似. $\downarrow$ A 为对称矩阵, 且 $a_{ii} = 1$ 或 -1 .

$$(A-E)(A+E) = 0.$$

设 λ 为 A 的一个特征值, 其对应的特征向量为 $X, \therefore |A-E||A+E| = 0.$

$$\therefore AX = \lambda X, \therefore A^2X = A\lambda X = \lambda^2 X$$

$$\Rightarrow X = \lambda^2 X \text{ 又 } X \neq \vec{0}, \therefore \lambda^2 = 1. \text{ 即 } \lambda \text{ 只能为 } 1 \text{ 或 } -1.$$

又, $\lambda = -1$ 为 $n-m$ 重, $\therefore \lambda = 1$ 为 m 重.

$$(A+E_n)X = \vec{0}$$

$$V_{\lambda=1} = n-m, (\lambda=-1)$$

$$\lambda=-1 \text{ 的特征子空间为 } n-m.$$

清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程 代数与几何 2007 年 1 月 11 日 下

(请将所有题目的答案写在试卷上, 并写清题号)

一 (选择题, 每题 4 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & x \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, 三阶矩阵 $B \neq 0$, 且满足 $AB=0$, 则 $\lambda = -8$
 $\rightarrow r(A)=2$ 且 $r(A)=3, AB=0 \Rightarrow B=0$
 $\therefore B=N(A)=3-2=1$

- A. $x = \sqrt{8}$, $r(B) = 1$; B. $x = \sqrt{8}$, $r(B) = 2$;
 C. $x = 8$, $r(B) = 1$; D. $x = 8$, $r(B) = 2$.

2. 设 $\vec{\alpha}_1 = (0, 2, 1, 1)^T$, $\vec{\alpha}_2 = (-1, -1, -1, -1)^T$, $\vec{\alpha}_3 = (1, -1, 0, 0)^T$, $\vec{\alpha}_4 = (0, 0, 1, -1)^T$, 则极大线性无关组是 D.

- A. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$; B. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$; C. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$; D. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4$.

3. 已知 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 的两个不同解, $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$ 是齐次线性方程组 $A\vec{X} = 0$ 的基础解系, 则 $A\vec{X} = \vec{b}$ 的通解是 B.

- ~~A. $\frac{\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2}{2} + k_1\vec{\alpha}_1 + k_2(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)$~~ ; B. $\frac{\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2}{2} + k_1\vec{\alpha}_1 + k_2(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2)$;
~~C. $\frac{\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2}{2} + k_1\vec{\alpha}_1 + k_2(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2)$~~ ; ~~D. $\frac{\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2}{2} + k_1\vec{\alpha}_1 + k_2(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)$~~ .

4. 设 $V(F)$ 是欧氏空间, 则 $\sigma \in L(V(F), V(F))$ 是正交变换的充要条件是 D.

- A. σ 保持 $V(F)$ 中任意两个向量的角度不变;
 B. σ 在 $V(F)$ 的任意一组正交基下的矩阵是正交矩阵;
 C. σ 把 $V(F)$ 任意一组正交基变成一组正交基;
 D. σ 把 $V(F)$ 中任意单位向量变成单位向量.

$$(\sigma(\vec{e}_i), \sigma(\vec{e}_j)) = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

$$|2A - \frac{A^{-1}}{|A|}|$$

二(填空题, 每题 4 分).

1. 设 $D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, M_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素的余子式, 则

$$M_{12} - M_{22} + M_{32} - M_{42} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

不是代数余子式 @m@

2. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5$, 则 $\begin{vmatrix} 3a_1 & b_1 - c_1 & 2c_1 \\ 3a_2 & b_2 - c_2 & 2c_2 \\ 3a_3 & b_3 - c_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = 30$.

3. 三阶矩阵 A 满足 $|E + A| = 0, |2E - A| = 0, r(E + 2A) = 2$, 则 $|2A - A^*| = \frac{7}{2}$

4. 三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, 属于特征值的特征向量分别是

$\vec{\alpha}_1 = (1, 0, -1)^T, \vec{\alpha}_2 = (0, 2, 0)^T, \vec{\alpha}_3 = (1, -1, 1)^T$, 则 $A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} (-2)^k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

三(总 8 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆.

$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

四(15 分) 已知直线 $L_1: \begin{cases} x-1 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} y-2 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} z-3 \\ 1 \end{cases}$, 直线 $L_2: \begin{cases} x+ty+2z=3s \\ x+2y+sz=3s \end{cases}$, 平面 $S: x+2y+2z=6$.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

1(6 分) 求直线 L_1 在 S 上的投影直线.

2(9 分) 根据参数 t 和 s 的取值情况, 判定平面 S 和直线 L_2 的相互关系.

$S = 2t = 2$ 面 $\rightarrow$ 面
 $S = 2t + 2$ 线 $\rightarrow$ 面
 $S + 2t + 2$ 点 $\rightarrow$ 点

五(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -4 & 4 & -7 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 求 A 的 Q-R 分解, 即求正交矩阵 Q 和

上三角矩阵 R , 使 $A = QR$.

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\beta_1 = \alpha_1 = (2, -4, -4)^T$$

$$\beta_2 = (-5, 4, -2)^T - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2} \beta_1 = (-4, 2, 4)^T$$

第 2 页共 3 页

$$\alpha_2 = \beta_2 - \frac{1}{2} \beta_1$$

$$\alpha_3 = \beta_3 + \frac{1}{2} \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_2$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \alpha_3 - \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_2 = (-2, -2, 1)$$

$$A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} \right) \begin{pmatrix} \|\beta_1\| & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ (\beta_1, \beta_2) & 1 & -\frac{1}{2} \\ (\beta_1, \beta_3) & (\beta_2, \beta_3) & 1 \end{pmatrix}$$

计算
列出算式

六 (15 分) 设线性空间

$R[x]_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} : \text{其中每个 } a_i \in \mathbb{C}\}$, σ 是 $R[x]_n$ 上的

线性变换: $\sigma(f)(x) = \frac{df}{dx}(x)$ (即函数 f 的导数).

1 (8分) 求 σ 的特征多项式. $\sigma(x) = \alpha A$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A|$

2 (7分) 证明 σ 不可对角化. $\lambda = 0, n \neq 1$. $\dim(N(\lambda E - A)) = n-1$. $\dim(N(\lambda E - A)) = 1 = \dim V_0 = n-1$. $\lambda = 0$. λ^n

七 (15 分) 设 V 是一个 n 维欧氏空间, $(\cdot, \cdot)$ 表示 V 的内积, $\sigma \in L(V, V)$ 是对称变换, 即对任意的 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, 都有 $(\sigma(\vec{\alpha}), \vec{\beta}) = (\vec{\alpha}, \sigma(\vec{\beta}))$.

1 (7分) 证明 σ 在任意一组标准正交基下的矩阵都是实对称矩阵.

2 (8分) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 σ 的 n 个特征值, 则对任意 $\vec{\alpha} \in V$, 均有

$(\sigma(\vec{\alpha}), \sigma(\vec{\alpha})) \leq M^2 (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$, 其中 $M = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$.

AX

①

$\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n$

$\sigma(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n) = (\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)A$

$\sigma(\vec{\epsilon}_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{\epsilon}_k$ $\sigma(\vec{\epsilon}_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{\epsilon}_k$

$(\vec{\epsilon}_k, \vec{\epsilon}_j) = \delta_{kj} \quad k, j = 1, \dots, n$

$(\sigma(\vec{\epsilon}_i), \vec{\epsilon}_j) = (\sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{\epsilon}_k, \vec{\epsilon}_j) = a_{ji}$

$(\vec{\epsilon}_i, \sigma(\vec{\epsilon}_j)) = (\vec{\epsilon}_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{\epsilon}_k) = a_{ij}$

②

1. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

2. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

3. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

4. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

5. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

6. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

7. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

8. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

9. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

10. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

11. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

12. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

13. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

14. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

15. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

16. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

17. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

18. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

19. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

20. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

21. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

22. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

23. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

24. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

25. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

26. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

27. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

28. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

29. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

30. 1949年10月1日，中华人民共和国成立。

清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程 代数与几何 2008 年 1 月 8 日 下

(请将所有题目的答案写在试卷上, 并写清题号)

一 (填空题, 每题 6 分, 共 24 分)

1. 设 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $B^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, 且 $A^* \neq 0$, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 是方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的三个解向量, 满足 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的通解为 $\frac{1}{4}(2, 1, 1, 5)^T + k(0, -1, 1, 1)^T$

3. 设 A, B 都是三阶矩阵. 将 A 的第一行的 -2 倍加到第三行得到三阶矩阵 A_1 , 将 B 的第一列乘以 -2 后得到三阶矩阵 B_1 , 若 $A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 14 & 16 \end{bmatrix}$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, 且 $a_i \neq a_j (i \neq j)$, $\vec{\beta} = \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1)$

为 n 维行向量, 试求 n 维行向量 $\vec{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 使得 $\vec{x}A = \vec{\beta}$.

二 (13 分)

设 a 为实数, 且平面 $\pi: x_1 + 2x_2 - ax_3 = 0$ 与直线 $l: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ 平行.

(1). 求 a 的值. -1

(2). 求直线 l 在平面 π 上的正交投影.

三(16分).

令矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & & & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $c_i (1 \leq i \leq n)$ 为实数.

- (1). 求 $\det(E - A)$ 的值. $1 - \prod_{i=1}^n c_i$
- (2). 求 $\det(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$ 的值.

四 (25分)

设三阶实对称矩阵 $A = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)$ 的三个列向量满足 $\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 = (1, -1, 1)^T$.

已知 A 有两个特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$.

- (1). 证明 $\lambda_3 = 1$ 是 A 的一个特征根, 且对应的特征向量为 $\vec{\beta} = (1, -1, 1)^T$.
- (2). 验证 $\vec{\beta} = (1, -1, 1)^T$ 也是矩阵 B 的一个特征向量, 并求 B 的全部特征根和特征向量.
- (3). 求矩阵 B 及 B^k (k 为正整数).

五 (10分)

设 $A, B, P \in M_n(F)$, 且 A, B 可逆. 证明:

$$r(A - P^T B^{-1} P) = r(B - P A^{-1} P^T).$$

六 (12分)

(1). 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 若 $r(A^m) = r(A^{m+1})$ 对某个正整数 m 成立.

证明: $\forall k \geq 1$, 有 $r(A^m) = r(A^{m+k})$. ✓

(2). 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 且 $n > m, r(A) = m$.

证明: $r(E_n - A^T A) - r(E_m - A A^T) \geq n - m$.

清华大学本科生考试试题专用纸

A 卷

考试课程 几何与代数 (1) 2009 年 1 月 7 日 下

班号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

一. 填空题 (请将答案直接填在横线上, 每题 5 分, 合计 40 分)

1. 设 R^4 的 3 维子空间 W 的两组基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T$ 及 $\beta_1 = (2, 1, 1, 0)^T$, $\beta_2 = (0, 1, 1, 2)^T$, $\beta_3 = (1, 3, 3, 1)^T$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵是 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. $\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}$

2. 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 2, 3)^T$, 矩阵 $A = \alpha\beta^T$, A 的全部特征值为 0 或 6.

$A^2 = RA$. $A(A - kE) = 0$. k 为其特征值. 0 为基 $n-1$ 个特征值.

3. 两条异面直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$, $L_2: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\uparrow n=1$.

Fuck!

4. 设 3 阶实对称方阵 A 的特征值 1 的特征向量为 $X_1 = (1, 0, 1)^T$, 特征值 2 的特征向量为 $X_2 = (1, 1, -1)^T$, 则特征值 3 的特征向量为 $(-1, 2, 1)^T$. $\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$

$\vec{X}_3 \cdot \vec{X}_1 = 0$. $\vec{X}_3 \cdot \vec{X}_2 = 0$.

5. 设 $\alpha, \beta \in R^n$, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$, $\beta = (2, 2, \dots, 2)^T$, 则 $|E_n - \alpha\beta^T| = \underline{-2n+1}$.

后 $n-1$ 个 0 少第 1 列.

6. 设 A^* 是 n 阶可逆方阵 A 的伴随矩阵, A 的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 A^* 的特征值是 $\lambda_j^{-1} \cdot \prod_{i=1}^n \lambda_i$. ($j=1, 2, \dots, n$).

$\times |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

$A^* = |A| A^{-1}$. $\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} \\ \vdots \\ \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

- ⑦ 已知 A 相似于 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩与 $A - 2E$ 的秩的和 $r(A) + r(A - 2E) = \underline{5}$.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 试判断 A 与 B 是否相抵, 相似,

你的结论是 A 与 B 相抵, 不相似. 说明: 相抵矩阵并不是相似.

二. 计算题 (9 题 12 分, 10 题 15 分, 合计 27 分)

9. 实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q 和对角阵 Λ , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

$\vec{x}_1 = (1, -1, 0)$
 $\vec{x}_2 = (-1, 1, 1)$
 $\vec{x}_3 = (-1, 1, 2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

10. 当 λ 为何值时, 下列方程组有解, 并求解 (用 λ 的函数表示):

$$\begin{cases} \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 3 \end{cases}$$

$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \beta \\ 1 & 2 & \lambda+3 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-3 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda+2\lambda-6 & \lambda^2-6\lambda-9 \end{matrix}$

三. 证明题 (11 题 15 分, 12 题 10 分, 13 题 8 分, 合计 33 分)

11. 设 A, B 是 n 阶方阵, 满足 $A+B=E_n$, 记方程组 $ABx=0$ 的解空间为 V , $Ax=0$ 的解空间为 V_1 , $Bx=0$ 的解空间为 V_2 , 试证:

(1) $AB=BA$; $A \in A+B = (A+B)A \Rightarrow A^2+AB=A^2+BA \Rightarrow AB=BA$.

(2) $V=V_1+V_2$: $\forall \alpha, \beta \in V$, $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$. $AB(\alpha+\beta) = ABA\alpha + AB\beta = BA\alpha + B\beta = 0$, $\alpha+\beta \in V$.

(3) $V=V_1 \oplus V_2$. $V \subseteq V_1+V_2$ (用反证法, 设 $\gamma \in V$, $\gamma \notin V_1+V_2$, 则 $\gamma = \mu\alpha + \nu\beta + \gamma$, $\mu\alpha + \nu\beta = 0$, $\gamma = 0$, 矛盾).

12. 设 $\varphi: C^n \rightarrow C^n$ 为线性变换 (其中 C^n 是 n 维复线性空间), $W \subseteq C^n$ 为线性子空间, 若 $\varphi(W) \subseteq W$, 则称 W 为 φ 的不变子空间. 证明: 若 W 为 φ 的非零不变子空间, 则存在 $X \in W$, 使得 X 为 φ 的一个特征向量.

13. 设 A 是 n 阶上三角阵, 对角元为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 证明:

(1) 当 $\lambda_i \neq \lambda_j (i < j)$ 时, 存在初等方阵

$$E_{ji}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -c \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ji}(c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & c \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

使得 $(E_{ji}(c))^{-1}AE_{ji}(c) = B$, 其中 B 是上三角阵, 且 B 的第 i 行第 j 列元素为 0; ✓

(2) 设 A 的对角元具有如下形式: $\lambda_1 = \dots = \lambda_{v_1} = \rho_1$, $\lambda_{v_1+1} = \dots = \lambda_{v_2} = \rho_2$, $\dots$, $\lambda_{v_{l-1}+1} = \dots = \lambda_n = \rho_l$, 其中 $\rho_1, \dots, \rho_l$ 互异, 则 A 相似于 C , 其中 C 为准对角阵, 每个对角子阵 C_k 是一个 $(v_k - v_{k-1})$ 阶上三角阵 (其中 $v_0 = 0, v_l = n$), 且对角元均为 ρ_k .

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 代数与几何 (I)

2002年12月30日

A 卷

班号 _____ 姓名 _____ 学号 _____

一、填空题 (每空4分, 共计32分)

1. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, 4, 6, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 6, 1, 6)^T$,

已知 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组, 则 $r = \underline{8}$.

2. 设 $\alpha = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\beta = \bar{j} - \bar{k}$, $\gamma = 2\bar{i} + \bar{j}$, 则 $\alpha \times \beta - \beta \times \gamma = \underline{-\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}}$.

3. 设四元齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = b$ 的 3 个解,

已知 $\eta_1 + \eta_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 则 $Ax = b$ 的通解是

$\underline{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 2)^T + k(0, 1, -1, -1)^T}$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 的四个特征值为 $\underline{6, 0, 0, 0}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

A, B, C 中与 D 相似的矩阵为 $\underline{AB}$, 与 D 相合 (合同) 的矩阵为 $\underline{BC}$.

相同的特征多项式

相同的秩与正惯性系数

6. λ 满足条件 $\underline{\lambda > 0}$ 时, 二次曲面 $x^2 + (2+2\lambda)y^2 + \lambda z^2 + 2xy = 5$ 是一个椭球面.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 已知 $\alpha = (t, 1, 1)^T$ 是矩阵 A 的特征向量, 则 $t = \underline{-1}$.

二. 计算题 (8题10分, 9题12分, 10, 11每题15分, 共计52分)

8. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 满足 $BA = A + B$, 求矩阵 $B - I = (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ & 0 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. 向量 α 在 R^3 的一组基 $\alpha_1 = (1, -2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, -1)^T$,

$\alpha_3 = (0, 1, -2)^T$ 下的坐标是 $(1, 0, 2)^T$, 试求 α 在基 $\beta_1 = (1, 0, 1)^T$,

$\beta_2 = (1, 1, -1)^T$, $\beta_3 = (0, 1, 0)^T$ 下的坐标. $Y = P^{-1}X$ P 是由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 到 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 的过渡矩阵

10. 设方程组 $M \beta \rightarrow \alpha: P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(-1, 2, -2)^T P^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

λ 为何值时, 方程组有无穷多解? 试求一般解.

11. 用正交线性替换化二次型 $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为标准形.

写出正交矩阵及标准形. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $|A - \lambda I| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = 8$. 标准形 $f = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\alpha_1 = (-1, 2, 0)$ $\beta_1 = (-1, 2, 0)$ $r_1 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$

$\alpha_2 = (-1, 0, 1)$ $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$

$\lambda_3 = 8$ $\alpha_3 = (2, 2, 1)$ $r_3 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ $r_2 = (-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, 1)$

三. 证明题 (每题8分, 共计16分)

12. 设 A 是实对称矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 试证明对任意 $X \neq 0$,

$$\lambda_1 \leq \frac{X^T A X}{X^T X} \leq \lambda_n, \text{ 并讨论等号何时成立.}$$

$$X^T A X = X^T \lambda X = \lambda X^T X$$

$$\therefore \frac{X^T A X}{X^T X} = \lambda$$

当 n 个特征值相等时等号成立.

13. 设 η_1, η_2, η_3 是 n 维向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 已知 A 的秩为 $n-3$, 齐次线性方程

m 个方程 n 个未知数.

则基础解系个数为 $n - (n-3) = 3$

组 $Ax = 0$ 的每个解向量都可由 η_1, η_2, η_3 线性表出. 试证明 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

清华大学本科生考试试题专用纸

A 卷

考试课程 几何与代数(I) 2003 年 12 月 29 日

系 _____ 班 姓名 _____ 学号 _____

一. 填空题 (将答案填在空格内, 每空 4 分, 合计 40 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. 设 $\alpha = (2, 1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 2, 0, 0)^T$, 若 $A = \alpha\beta^T$, B 是一个秩为 3 的 4 阶方

除 3 特殊值
还有什么方法?

阵, 则秩 $r(BA - 2B) = 3$.

3. 已知 3 阶非零矩阵 B 的每个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + (k-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

则 $k = -3$, $|B| = 0$.

4. 设 A 是 3 阶矩阵, 已知 1 是 A 的一个特征值, 且 $|A| = -2$, $\text{tr} A = 2$, 则 $A^2 - I$ 的 3 个特

征值是 $0, 0, 3$.

5. 与直线 $x = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}$ 平行且与平面 $x - y + z + 1 = 0$ 垂直的平面的法向量为 $(3, 2, -1)$.

6. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3$ 的正惯性指数为 2.

7. 当初等矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 时, 有 $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 成立.

单位阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等阵

8. 在 $M_2(\mathbb{R})$ 上, 向量组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩 = 3.

二. 解答题 (第9, 10题各15分, 11题14分, 12题8分, 13题(1)5分(2)3分, 合计60分)

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, t 为实数, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间是2维的, 求线性方程组 $Ax=b$ 的通解. $t=1$

4-2=2 基础解系有2个

通解: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

- (1) 求正交线性替换化二次型为标准型;
 (2) $f=1$ 为何种二次曲面?
 双叶双曲面.

$A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $|A| = |A - \lambda I| = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 3)$

11. R^3 上, 设平面 π 在给定的直角坐标系中的方程是 $x+y+z=0$, 点 P 的坐标是 (a, b, c) , $AP = \text{diag}(3, -1, 3)$ 令 $\alpha = (a, b, c)^T$

- (1) 求与点 P 关于平面 π 对称的点 Q 的坐标; $Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c \\ -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \end{pmatrix}^T$
 (2) 求3阶矩阵 A , 使得 $A\alpha = \beta$, 其中 β 是 Q 点坐标的转置;
 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
 (3) 设平面 π_1 的方程是 $x-y+z=1$, 求平面 π_2 的方程, 使得 π_1 与 π_2 关于平面 π 对称.
 $-18x + 15y + 8z + \frac{49}{3} = 0$

12. 设 n 阶方阵 A 的非零互异特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其对应的特征向量分别为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 又设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$, 若 $1 \leq i \leq s$, 试问向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_t + \beta_t$ 是否线性无关, 证明你的结论.

一定不在 $(A - \lambda_i I)x=0$ 的解空间里.

13. 在 n 维线性空间 V 上, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 其关系式为 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)A$, 其中 A 是 $s \times t$ 矩阵, 试证明:

- (1) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 A 的秩 $r(A) = t$;
 (2) $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r(A)$, 其中 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 是向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩.

证明: (i) 必要性 $\because \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 设 $P = (\beta_1, \dots, \beta_t)$, $n \geq t$ 充分性:
 $\therefore r(P) = t$
 又 $\because \beta_1, \dots, \beta_t$ 可由线性无关的 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出
 把 A 按列分块 $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$
 其中 $a_1, \dots, a_t$ 线性无关.
 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t$

$\Rightarrow AX=0$ 的解也是 $QAX=0$ 的解 $\therefore t \leq s$
 $QAX=0 \Rightarrow Q(AX)=0$ $\therefore r(A) \leq t$
 设 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ $\therefore r(Q) = s$ 若 $\beta_1, \dots, \beta_t$ 线性相关, 则有非零组合使其为0.

$\therefore AX=Y$ $\therefore P=QA$ $\therefore r(P) \leq \min\{r(Q), r(A)\}$ $\therefore r(P) \leq r(A)$
 $QY=0$ $\therefore t \leq r(A)$
 $r(Q)=s$ $\therefore r(A) = t$
 $Y \neq 0$ $\therefore r(A) = t$
 $QY \neq 0$ $\therefore r(A) = t$
 只有零解

即当且仅当 $Y=0$ 时 $QY=0$ 解空间维数 $n' = t - r(A) = t - r(\beta_1 \sim \beta_t)$
 $\therefore QAX=0 \Rightarrow AX=0$ $\therefore r(A) = r(\beta_1 \sim \beta_t)$
 $QAX=0$ 与 $AX=0$ 是同解方程组 $\therefore r(A) = r(\beta_1 \sim \beta_t)$
 只要 $k_1 \sim k_t$ 不全为0, 则 $Q(k_1\beta_1 + \dots + k_t\beta_t) \neq 0$
 即 $k_1\beta_1 + \dots + k_t\beta_t \neq 0$
 即 $\alpha_1 \sim \alpha_s$ 线性无关 $2003-2$

PPY
 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

证秩
 相等用同
 解方程组