

第二次机考

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & b & b & b & b \\ b & 2 & b & b & b \\ b & b & 2 & b & b \\ b & b & b & 2 & b \\ b & b & b & b & 2 \end{pmatrix}$ $r(A) = 4$, 求 b .

解: $r(A) = 4$, 则 $\det A = 0$,

$$\begin{aligned} |A| &= | \cancel{2I_5} (2-b)I_5 + \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \\ b \\ b \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) | \\ &= (2-b)^5 | I_5 + \frac{1}{2-b} \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} (1, 1, \dots, 1) | = (2-b)^5 | I_5 + \frac{1}{2-b} (1 \dots 1) \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} | \\ &= (2-b)^4 [2-b+5b] = (2-b)^4 (2+4b) \end{aligned}$$

若 $b=2$, 则 $r(A)=1$, 故 $b \neq 2$, $2+4b=0$, $b=-\frac{1}{2}$

2. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是一组 n 维向量, $\alpha_1 \neq 0$, 至少有一个 α_i ($2 \leq i \leq s$) 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ 表出这一条件是这组向量相关的——条件.

解: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 相关 $\Rightarrow \exists k_1, \dots, k_s$ 不全为 0, $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

设 $k_i \neq 0$, 但 $k_{i+1} = \dots = k_s = 0$, 则 $\alpha_i = (-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1) + \dots + (-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1})$

(因为 $\alpha_1 \neq 0, i \geq 2$), 反之, 显然, $\Rightarrow$ 充要条件

3. 设 A n 阶方阵, I_r r 阶单位阵, 则秩 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A$

(A) $= r$ 或 $= \text{秩}(A)$ (B) $= \max(\text{秩}(A), r)$

(C) $< \min(\text{秩}(A), r)$ (D) 以上都不对

解: 将 A 分块 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ A_1 是 r 阶子阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

秩 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \text{秩}(A_1, A_2) = A$ 的前 r 行的向量组的秩 $\leq \min(\text{秩} A, r)$

(C) 不对, 因为可能是等号, 选 (D).

4. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶不可逆阵, A 的行列式中 a_{22} 的代数余子式 $A_{22} \neq 0$, 则 () 是齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系

解: (A) $(a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$ (B) $(a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$
(C) $(a_{11}, a_{12}, a_{13})^T, (a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$ (D) $(a_{11}, a_{21}, a_{31})^T, (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$

解: A 不可逆 $\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A^*A = |A|I_3 = 0$, $r(A) = 2$ (因为 $A_{22} \neq 0$)
 $r(A^*) = 1$ (习题 4, 16 题) $\Rightarrow A^*x = 0$ 的基础解系有 2 个向量.

$A^*A = 0 \Rightarrow A$ 的列是 $A^*x = 0$ 的解. $\Rightarrow A$ 的 1, 3 列是 $A^*x = 0$ 的基础解系.
 $A_{22} \neq 0 \Rightarrow A$ 的 1, 3 列线性无关

5. 设 A, B n 阶方阵, 则

(A) $r(AB - I_n) < r(A - I_n) + r(B - I_n)$ (B) $r(AB - I_n) > r(A - I_n) + r(B - I_n)$

(C) $r(AB - I_n) = r(A - I_n) + r(B - I_n)$ (D) 以上都不对.

解: 令 $A = B = I_n$, 则 $r(AB - I_n) = 0 = r(A - I_n) = r(B - I_n)$, 因此

(A), (B) 错误

令 $A = 2I_n, B = \frac{1}{2}I_n$, 则 $r(AB - I_n) = 0$ $r(A - I_n) = n = r(B - I_n)$

故 (C) 也错误.

6. 设 A, B 为 n 阶不可逆阵, 则

(A) $r(A+B) < n$, (B) $r(A+B) > n$ (C) $r(A+B) = n$, (D) 以上都不对

解: ~~$A=B=I_n$~~ 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 第 i 行 $B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 第 $i+1$ 行

则 $A+B = I_n$ $r(A+B) = n$ 故 (A), (B) 错.

令 $A = -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ 则 $r(A+B) = 0 \neq n$ 故 (C) 也错.

7. 设 A n 阶阵, α 是 n 维列向量, 若秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \text{秩 } A$.

则 (A) $AX = \alpha$ 有无穷解. (C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$ 仅有零解.

(B) $AX = \alpha$ 有唯一解. (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$ 有非零解.

解: 因为秩 $A \leq \text{秩} \begin{pmatrix} A \\ \alpha^T \end{pmatrix} \leq \text{秩} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \text{秩 } A$

故秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \text{秩} \begin{pmatrix} A \\ \alpha^T \end{pmatrix}$, 这意味着 $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ 可由 $\begin{pmatrix} A \\ \alpha^T \end{pmatrix}$ 的列向量组表

出, 即存在 ~~非零~~ 向量 $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \beta$, $\begin{pmatrix} A \\ \alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\beta = \alpha$
 $\alpha^T \beta = 0$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (D) \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} A\beta - \alpha \\ \alpha^T \beta \end{pmatrix}$$

8. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间, 令 $W = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in V\}$ 规定

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), \quad k(\alpha_1, \alpha_2) = (k\alpha_1, k\alpha_2)$$

则 W 是线性空间, 若 $\dim V = n$, 则 $\dim W = (\quad)$

解: 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的基, 则

$(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_n)$ 是 W 的基. $\Rightarrow \dim W = 2n$.

9. 设 V_1, V_2 $\mathbb{F}$ 上线性空间, 令 $W = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$ 规定

正如上题, 则 W 是 $\mathbb{F}$ 上空间, $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2$, 则 $\dim W = \underline{\hspace{2cm}}$

解: 设 $e_1, \dots, e_{n_1}$ 是 V_1 的基, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_2}$ 是 V_2 的基. 则

$(e_1, 0), \dots, (e_{n_1}, 0), (0, \varepsilon_1), \dots, (0, \varepsilon_{n_2})$ 是 W 的基. 例如:

$$\begin{aligned} \text{的确, } \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in W, \quad (\alpha_1, \alpha_2) &= (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) \\ &= \sum k_i (e_i, 0) + \sum m_j (0, \varepsilon_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \\ &= \mathbb{R}^{m+n} \end{aligned}$$

10. 按 $\mathbb{R}$ 上矩阵加法、数乘, 以下方阵集合是线性空间的有

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(2) $\{X \mid X, A \text{ } n \text{ 阶方阵}, AX=0\}$

(3) $\{A \mid \text{tr}(A)=0\}$

(4) n 阶对称阵与反对称阵全体所组成集合. $\swarrow$ 对称阵 $\nwarrow$ 反对称阵

解: (4) 不是, 事实上任意 n 阶阵 $A = \frac{A^T + A}{2} + \frac{A - A^T}{2}$

即 (4) 对于加法不封闭.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}^3$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关, 则 " $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 表出" 是 " $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关" 的 _____ 条件.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$)

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 表出, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 \leq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$\Rightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关, 反之, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关, 则是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 故

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由它们表出 $\Rightarrow$ 充要条件

12. 4 个平面 $a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad i=1, 2, 3, 4$, 交于一条直线 $\Leftrightarrow$

对应的联立方程组系数阵 A 和增广阵 $\bar{A}$ 的秩满足 _____

解: 交于一条直线 $\Leftrightarrow A_{4 \times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ 有解, 且解 $A_{4 \times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ 有基.

基础解系向量个数 $= 1 \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = A$ 的列数 $- 1 = 2$.

设 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ 是 $A_{4 \times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ 则任一解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \vec{e}$

$\vec{e}$ 是交直线方向向量, 也是 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ 的基础解系.

13. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 若 $r(A^*) = 1$, 则有 ()

- (A) $a=b$ 或 $a+2b=0$ (B) $a=b$ 或 $a+2b \neq 0$ (C) $a \neq b$ 且 $a+2b=0$
 (D) $a \neq b$ 且 $a+2b \neq 0$.

解: (类似于1题). $r(A^*) = 1 \Rightarrow r(A) = 2$ (习题4, 16题) $\Rightarrow |A| = 0$

$$|A| = |(a-b)I_3 + \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1)| = (a-b)^3 |I_3 + \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1)|$$

$$= (a-b)^3 |I_3 + \frac{1}{a-b} (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}| = (a-b)^3 |I_3 + \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}| = (a-b)^3 |I_3| = (a-b)^3$$

$\Rightarrow a=b$ 或 $a=-2b$, 若 $a=b$, 则 $r(A)=1$ 矛盾, 故 $a \neq b$ 且 $a=-2b$.

14. $A_{m \times n} x = b$ $r(A) = r$. 则

- (A) $r=m$, 则 $Ax=b$ 有解. (C) $m=n$, $Ax=b$ 有唯一解
 (B) $r=n$ 则 $Ax=b$ 有唯一解 (D) $r < n$, $Ax=b$ 有无穷解.

解: 若 $r=m$, 则 $r(A) = m = r(A|b) \Rightarrow Ax=b$ 有解.

(B) 不对 设 $A = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$ $Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$ 若令 $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 则 $Ax=b$ 无解

(C) 不对, 例如 $m=n=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解

(D) 不对. 当 $r < n$ $Ax=0$ 无穷解 但 $Ax=b$ 可能无解. 如上例

15. 设 n 阶阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, A_1 是 r 阶可逆阵, 则 $A_4 = A_3 A_1^{-1} A_2$ 是 $r(A) = r$ 的 () 条件.

解: $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)$$

$$\text{故 } r(A) = r = r(A_1) \Leftrightarrow r(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2) = 0 \Leftrightarrow A_4 = A_3 A_1^{-1} A_2$$

16. 设 A n 阶方阵, B $n \times m$ 阵, 且 $AB=B$, 以下 () 是 $A=I$ 的充分条件.

(A) $r(B)=m$ (B) $r(B)=n$ (C) $m=n$ (D) $B \neq 0$

解: $AB=B \Leftrightarrow (A-I)B=0$ 若 $r(B)=n$, 则右消去律成立 $\Rightarrow A-I=0$

注记: 若 M 列满秩, 则 $MC_1=MC_2 \Rightarrow C_1=C_2$ (左消去律)

N 行满秩, 则 $D_1N=D_2N \Rightarrow D_1=D_2$ (右消去律)

17. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 A 交换的 3 阶阵全体, 记为 $C(A)$, 则

$C(A)$ 是线性空间, $\dim C(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 记 $B = (b_{ij}) \in C(A)$ 则 $AB=BA$ $A = I_3 + E_{31}$

即 $E_{31}B = BE_{31}$, 即 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & 0 \\ b_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_{13} = b_{23} = 0 \\ b_{32} = b_{33} \\ b_{31} = b_{33} \end{matrix}$

则 $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{11} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim C(A) = 5$.

18. 设 V 是迹为 0 的 2 阶实方阵全体, 则 V 是线性空间.

$\dim V = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a+d=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$.

V 的基为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim V = 3$.

19. 设 A 是 n 阶实方阵, 则

(A) $r(A^2) = r(A)$ (B) $r(A^n) = r(A^{n-1})$ (C) $r(AA^T) = r(A)$

(D) 以上均错

解: (D).

20. 设 A 是 n 阶方阵, $A^2=I$, 且 $A \neq I$, 则 (1) $(A+I)x=0$ 有非零解
 (2) $(A-I)x=0$ 必只有零解; (3) $r(A+I)=n-r(A-I)$ 中成立的是
 (A) (1)(2); (B) (1)(3); (C) (2)(3); (D) (1)(2)(3).

解: (1) $A^2=I \Rightarrow (A+I)(A-I)=0$ 故 $A-I$ 的每一列均是 $(A+I)x=0$ 的解, 但 $A-I \neq 0$, 故 $(A+I)x=0$ 有非零解

(2) $(A-I)(A+I)=0$ 故 $A+I$ 的每一列均是 $(A-I)x=0$ 的解.

若 $A+I \neq 0$, 即 $A \neq -I$, 则 $(A-I)x=0$ 有非零解

(3) 来自于一个一般结论: 设 X, Y 是 n 阶方阵, 则且 $XY=0$, 则

$$r(X+Y) \leq r(X) + r(Y) \leq n$$

这里 $X=A+I, Y=I-A$ 答案是 (B).

21. 设 A, B n 阶方阵, 以下正确的是

① 若 P 是 n 阶可逆阵, 则 $r(PAB)=r(AB)$;

② 若 P _____, 则 $r(APB)=r(AB)$;

③ 若 Q $m \times n$ 阵, $r(Q)=n$, 则 $r(QAB)=r(AB)$;

④ 若 S $n \times l$ 阵, $r(S)=l$, 则 $r(ABS)=r(AB)$.

解: ③ 若 Q 列满秩, 则左消去律成立 (见 16 题), 因此

$$QABx=0 \Leftrightarrow ABx=0; \text{ 这说明 } n-r(QAB)=n-r(AB).$$

②, ④ 不正确. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB=0 \quad APB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(AB) \neq r(APB)$$

④ 列满秩阵不满足右消去律, $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \end{pmatrix}_{n \times 2n}$ $B = I_{2n}$ $S = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S \text{ 是列满秩} \quad ABS = \begin{pmatrix} 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{但 } AB \neq 0.$$

$$\Rightarrow r(ABS) \neq r(AB).$$

22. 设 $AX=0$ 的系数阵 A 是 n 阶阵, 满足 $r(A)=r \leq n-2$, 则 $A^*X=0$ 的基础解系含 一个 向量

解: 由习题4, 16题, $r(A^*)=0$, $A^*=0$, $X \in \mathbb{R}^n$ 任意取, 故为 n 个向量.