

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数 B 卷 2025 年 11 月 16 日

所有答题结果均须写到答题纸的指定区域内, 在本卷上答题无效!

注: 本试卷所有矩阵、向量都指实矩阵、实向量.

注: 本试卷 I_n 指 n 阶单位阵, O 指零矩阵, 0 指零向量, 其分量个数请结合上下文理解.

一、A 类选择题 (每题 3 分, 每题只有一个正确选项.)

1. (3 分) 令 $\alpha = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$, 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 203 & a \\ 3 & 298 & b \\ 5 & 399 & 2a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (A). 0; (B). $\frac{10}{3}$; (C). $\frac{12}{3}$; (D). $\frac{14}{3}$;

2. (3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (A). 0 (B). -1 (C). -2 (D). -3

3. (3 分) $\begin{vmatrix} 38 & 10 & 300 \\ 82 & 20 & 603 \\ 123 & 30 & 901 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (A). 200 (B). 210 (C). 180 (D). 125

4. (3 分) 设 A 是 n 阶方阵, $2A - A^2 = 4I_n$, 则 $(A + I_n)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (A). $-\frac{1}{7}(A - 3I_n)$ (B). $\frac{1}{2}(A - 2I_n)$ (C). $\frac{1}{4}(A - I_n)$ (D). $\frac{1}{5}(A - 4I_n)$

5. (3 分) 如果方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有无穷多解, 则 k 的取值和所有解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

- (A). $k = -1, \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c \\ 4 - c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\};$ (B). $k = 4, \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c \\ 4 - c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\};$
 (C). $k = -1, \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c \\ 4 + c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\};$ (D). $k = 4, \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c \\ 4 + c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}.$

6. (3 分) 上一题方程组如果无解, k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

- (A). $k \neq -1$ (B). $k = -1$ (C). $k \neq 1$ (D). $k = 1$

7. (3 分) 以下命题中正确的是_____

- (A). 若 A, B 都是对称矩阵, 则 $AB = BA$.
(B). 若可逆矩阵 A, B 满足 $(AB)^2 = A^2B^2$, 则 $AB = BA$.
(C). 若可逆矩阵 A, B 满足 $A^2B = BA^2$, 则 $AB = BA$.
(D). 若 A, B 都是上三角矩阵, 则 $AB = BA$.

8. (3 分) 已知 n 阶方阵 A, B 满足 $AA^T = I_n, BB^T = I_n$, 则 _____.

- (A). $|A| + |B| = 0$ (B). $|A| = |B|^2$
(C). $|A| \cdot |B| = 1$ 或 -1 (D). $|A| - |B| = 1$

9. (3 分) 下列命题正确的是 _____.

- (A). 若矩阵 A, B, C 满足 $A \neq O, AB = AC$, 则 $B = C$.
(B). 若矩阵 A 满足 $A^2 = I_n$, 则 $A = \pm I_n$.
(C). 若矩阵 A 满足 $A^2 = A, |A - I_n| \neq 0$, 则 $A = O$.
(D). 对方阵进行初等行变换, 不改变方阵的行列式.

10. (3 分) 已知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量中线性相关的是_____

- (A). $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ (B). $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$
(C). $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$ (D). $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

二、B 类选择题 (每题 4 分, 每题只有一个正确选项.)

11. (4 分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}$ 和 $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ 满足 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示方式不唯一, 则 a, b 满足_____.

- (A). $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ (B). $a = b \neq 0$ (C). $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ (D). $a = b$ 或 $b \neq 0$

12. (4 分) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $AB + BA = I_3$, 则 $A^3B + BA^3 =$ _____.

- (A). I_3 (B). A (C). A^2 (D). A^3

13. (4 分) 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} I + A^{-1} & A^{-1}B + I + A \\ B^{-1} & B^{-1}A + I \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A). $|AB|$ (B). 1 (C). $2|AB| + 1$ (D). -1 .

14. (4 分) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix}$, A_{11}, A_{12}, A_{13} 是其第一行元素的代数余子式, 且 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$, 则 $D =$ _____.

- (A). 0; (B). 1; (C). 2; (D). -1

15. (4 分) 两个同阶反对称矩阵的乘积 ()

- (A). 仍是反对称矩阵 (B). 是同阶对称矩阵
(C). 不一定是反对称矩阵 (D). 一定不是反对称矩阵

16. (4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A^{2025} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A). 2026

(B). 2025

(C). 2024

(D). 0

17. (4 分) 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 3, |B| = 2$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(A). $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$ (B). $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$ (C). $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$ (D). $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

18. (4 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, 设 3 阶方阵 $B = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{2025} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]$, 则以下正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(A). $\beta_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$;

(B). $\alpha_1 = 3\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3$;

(C). $\beta_1 = 3^{2025}\alpha_1 - \alpha_2 + 3^{2025}\alpha_3$;

(D). $\alpha_1 = 3^{2025}\beta_1 - \beta_2 + 3^{2025}\beta_3$;

19. (4 分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 4 个向量, 且 α_4 不能由其它三个向量线性表示, 则必有 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(A). 向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$ 线性无关

(B). 向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$ 线性相关

(C). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

(D). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

20. (4 分) 设矩阵 A, B 满足 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 则 $B^{1024} - 2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A). $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (B). $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (C). $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D). $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

三、证明题 (需写出必要的步骤)

21 (15 分) 设 A 为 n 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为非零 n 维列向量, 满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1, \quad A\alpha_2 = -\alpha_2, \quad A\alpha_3 = 0,$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

22 (15 分) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 且 $AB = BA$.

(1) (11 分) 如果 $A^2 = B^3 = I_n$, 证明: $I_n + A + B$ 和 $I_n - A + B$ 都可逆.

(2) (4 分) 如果 $A^3 = B^3 = I_n$, $A + B + I_n$ 是否一定可逆? 请证明你的论断