

2024 级微积分 A2 期中考试

mathsdream 整理版

2025.04.12

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 2)$ 处可微，且 $f(1, 2) = 3, \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$ 。记 $g(x) = f(x, -1 + f(x, x^2 + 1))$ ，则 $g'(1) =$ _____。
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} =$ _____。
3. 函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿 $(2, -1, 2)$ 方向的方向导数为 _____。
4. 设 $\begin{cases} u = \frac{2y^2}{x} \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases}$ ，则其 Jacobi 矩阵的行列式 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} =$ _____。
5. 曲面 $e^{xyz} = x + yz$ 在点 $(1, 2, 0)$ 的一个单位法向量为 _____。
6. 曲线 $\begin{cases} e^x + \cos y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, -2)$ 的一个单位切向量为 _____。
7. $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{1 + x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 带有 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 _____。
8. 设 $z = z(x, y)$ 是方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 确定的一个隐函数，且满足 $z(1, 1) = 1$ ，则在点 $(1, 1)$ 处 $dz =$ _____。
9. 设 $f(x) = \int_0^{x^2+1} e^{-xt^2} dt$ ，则 $f'(0) =$ _____。
10. 设函数 $f(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^y} dx$ 在区间 I 连续，则最大区间 $I =$ _____。

二、解答题

11. (10 分) 设 $f(u) \in C^{(2)}$, 且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$, 求 $f(u)$ 。
12. (10 分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 请回答下列问题, 并说明理由。
- (I) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?
- (II) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否存在偏导数? 若存在, 求: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ 。
- (III) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 若可微, 求 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的全微分。
13. (10 分) 已知 $b > a > 0$, 计算 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 。
14. (10 分) 利用 Lagrange 乘子法求曲线段 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 上的点到原点距离的最大值。
15. (10 分)
- (I) 用隐函数定理证明 $z^3 - 2xz + y = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 附近确定了一个 $C^{(2)}$ 类隐函数 $z = z(x, y)$;
- (II) 求函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0) = (1, 1)$ 处的二阶 Taylor 多项式。
16. (15 分) 设 $f(x, y) = e^{xy} + \frac{x^2 + y^2}{2e}$ 。
- (I) 求 $f(x, y)$ 的所有驻点, 讨论驻点是否为极值点, 并判断极值点类型。
- (II) 求 $f(x, y)$ 的值域。
17. (5 分) 设 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且满足对任意 (x, y) 都有 $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$, $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$ 且 $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = \text{常数}$ 。证明: $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均为常数函数。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 2)$ 处可微，且 $f(1, 2) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1$ 。记 $g(x) = f(x, -1 + f(x, x^2 + 1))$ ，则 $g'(1) = 6$ 。

解析：由链式法则，

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'_1(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) + f'_2(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) \cdot \frac{\partial(-1 + f(x, x^2 + 1))}{\partial x} \\ &= f'_1(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) + f'_2(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) \cdot \left(f'_1(x, x^2 + 1) + f'_2(x, x^2 + 1) \cdot \frac{\partial(x^2 + 1)}{\partial x} \right) \\ &= f'_1(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) + f'_2(x, -1 + f(x, x^2 + 1)) \cdot (f'_1(x, x^2 + 1) + f'_2(x, x^2 + 1) \cdot 2x). \end{aligned}$$

代入 $x = 1$ ，此时 $f(x, x^2 + 1) = f(1, 2) = 3$ ，可得

$$g'(1) = f'_1(1, 2) + f'_2(1, 2) \cdot (f'_1(1, 2) + f'_2(1, 2) \cdot 2) = 2 + 1 \cdot (2 + 1 \cdot 2) = 6.$$

符号说明：个人习惯，在这种复合/隐函数求导题中，会对函数的导数和变量的导数进行符号上的区分，例如对二元函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ，记 f 关于其第一个变量的偏导数为 f'_1 ，（等价于题目中的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ）。而某个量 z 对另一个变量 x 的导数，才使用 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的记法。

在该记号下，我们有链式法则，求量 $z = f(u, v)$ 对 x 的导数为：

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = f'_1(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2(u, v) \frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^3$ 。

解析：幂指形式，先取对数：

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x+y} \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x+y} \frac{3}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x}{x+y} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{3}{1+y/x} \\ &= 3 \end{aligned}$$

因此原极限为 e^3 。

3. 函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿 $(2, -1, 2)$ 方向的方向导数为 4。

解析：该方向的单位方向向量为 $\frac{1}{3}(2, -1, 2)$ ，因此方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}(1, 1, 1) &= \text{grad} u(1, 1, 1) \cdot \mathbf{l} \\ &= (2, 4, 6) \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

4. 设 $\begin{cases} u = \frac{2y^2}{x} \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases}$, 则其 Jacobi 矩阵的行列式 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = -6$ 。

解析:

$$\begin{aligned} \frac{D(u,v)}{D(x,y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{2y^2}{x^2} & \frac{4y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2y^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{y^2} - \frac{4y}{x} \cdot \frac{2x}{y} \\ &= 2 - 8 = -6. \end{aligned}$$

5. 曲面 $e^{xyz} = x + yz$ 在点 $(1, 2, 0)$ 的一个单位法向量为 $(-1, 0, 0)$ (或 $(1, 0, 0)$)。

解析: 设 $F(x, y, z) = e^{xyz} - x - yz$, 则 $\text{grad}F = (yze^{xyz} - 1, xze^{xyz} - z, xye^{xyz} - y)$, 在点 $(1, 2, 0)$ 处, $\text{grad}F(1, 2, 0) = (-1, 0, 0)$, 因此一个单位法向量为 $(-1, 0, 0)$ 。

6. 曲线 $\begin{cases} e^x + \cos y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, -2)$ 的一个单位切向量为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ (取反方向也可)。

解析: 设 $F(x, y, z) = e^x + \cos y + z$, $G(x, y, z) = x + y - z - 2$, 则 $\text{grad}F(0, 0, -2) = (1, 0, 1)$, $\text{grad}G(0, 0, -2) = (1, 1, -1)$, 因此曲线的切向量为 $\text{grad}F \times \text{grad}G = (-1, 2, 1)$, 一个单位切向量为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ 。

7. $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{1+x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 带有 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $1 + x + y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + o(x^2 + y^2)$ 。

解析: 可以计算导数然后套用 Taylor 公式的定义, 不过我们这选择直接展开计算:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x+y} \frac{1}{1+x^2+y^2} \\ &= (1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + o((x+y)^2))(1 - (x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)) \\ &= 1 + x + y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

8. 设 $z = z(x, y)$ 是方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 确定的一个隐函数, 且满足 $z(1, 1) = 1$, 则在点 $(1, 1)$ 处 $dz = -dx - dy$ 。

解析: 将方程中的 z 视作因变量, x 和 y 视作自变量, 方程两边同时对 x 和 y 求导, 得到:

$$\begin{aligned} 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} &= 3yz + 3xy \frac{\partial z}{\partial x}, \\ 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} &= 3xz + 3xy \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

代入 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, 解方程得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, 因此

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -dx - dy.$$

注: 熟悉微分的同学也可以选择直接对方程两边微分, 得到

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 3yzdx + 3xzydy + 3xydz,$$

代入 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, 即可得到 $dz = -dx - dy$ 。

9. 设 $f(x) = \int_0^{x^2+1} e^{-xt^2} dt$, 则 $f'(0) = -\frac{1}{3}$ 。

解析:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{x^2+1} \frac{\partial(e^{-xt^2})}{\partial x} dt + e^{-x(x^2+1)^2} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} \\ &= - \int_0^{x^2+1} t^2 e^{-xt^2} dt + 2xe^{-x(x^2+1)^2} \\ f'(0) &= - \int_0^1 t^2 dt + 0 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

10. 设函数 $f(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^y} dx$ 在区间 I 连续, 则最大区间 $I = (1, +\infty)$ 。

解析: 首先确定 $f(y)$ 什么时候存在, 由广义积分判敛知识可得, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^y} dx$ 收敛当且仅当 $y > 1$ 即 $y \in (1, +\infty)$ 。

下面证明 $f(y)$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续, 只需要证明对任意 $y_0 > 1$, $f(y)$ 在 y_0 处连续。考虑闭区间 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset (1, +\infty)$, 则对任意 $x \geq 1$, 有

$$\left| \frac{\ln(1+x^3)}{x^y} \right| \leq \frac{\ln(1+x^3)}{x^{y_0-\delta}}.$$

由于 $y_0 - \delta > 1$, 所以 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^{y_0-\delta}} dx$ 收敛, 因此由广义积分的 Weierstrass 判别法可知, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^y} dx$ 关于 $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 一致收敛, 从而 $f(y)$ 在 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 上连续, 特别地在 y_0 处连续。由于 y_0 为任意取的, 因此 $f(y)$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续。

注: 思维过程其实就反着来的, 首先想要 $f(y)$ 在某个区间上连续, 就会想着要求积分在这个区间上一致收敛, 而证明一致收敛就是依靠 Weierstrass 判别法, 所以需要放大积分被积函数 $\frac{\ln(1+x^3)}{x^y}$, 而这个函数是随着 y 的减小而增大的, 所以假如在某个闭区间上连续或证明一致收敛, 就只需要这个闭区间的下端点大于 1, 最终得到是在下界为 1 的开区间上连续。

二、解答题解析

11. (10 分) 设 $f(u) \in C^{(2)}$, 且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$, 求 $f(u)$ 。

解析: 设 $u = e^x \sin y$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \frac{\partial u}{\partial x} e^x \sin y + f'(u) e^x \sin y = f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''(u) \frac{\partial u}{\partial y} e^x \cos y - f'(u) e^x \sin y = f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y\end{aligned}$$

代入原方程, 得到

$$f''(u) e^{2x} (\sin^2 y + \cos^2 y) = f(u) e^{2x}$$

即 $f''(u) = f(u)$, 解该常微分方程, 得到 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$.

12. (10 分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 请回答下列问题, 并说明理由。

- (I) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?
 (II) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否存在偏导数? 若存在, 求: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
 (III) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 若可微, 求 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的全微分。

解析:

(I)

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

由夹逼定理可得, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。

(II) 由偏导数的定义:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

极限存在, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ 存在, 为 0, 同理可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ 。

(III) 考虑极限:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

对该极限, 考虑当 (x, y) 沿 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 极限值为 $\frac{k}{1 + k^2}$, 所以极限不存在, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微。

13. (10 分) 已知 $b > a > 0$, 计算 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 。

解析: 书上原题 (《高等微积分教程 (下)》P.108 例 2.2.2), 懒得敲解析了, 请看:

解 解法一 因为

$$\int_c^b x^y dy = \frac{x^y}{\ln x} \Big|_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

由定理 2.2.4

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

解法二 记 $I(y) = \int_0^1 \frac{x^y - x^a}{\ln x} dx$, 由定理 2.2.2 可得

$$I'(y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^y - x^a}{\ln x} \right) \right] dx = \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{1+y}.$$

积分

$$I(y) = \ln(1+y) + C,$$

$I(a) = 0$ 可得 $C = -\ln(1+a)$, 故

$$I(b) = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

14. (10 分) 利用 Lagrange 乘子法求曲线段 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 上的点到原点距离的最大值。

解析: 转化为求 $x^2 + y^2$ 在 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ 条件下的最大值, 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - 3xy + y^3).$$

求其的驻点:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda(3x^2 - 3y) = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda(-3x + 3y^2) = 0, \\ L'_\lambda = x^3 - 3xy + y^3 = 0. \end{cases}$$

前两个方程消去 λ 后得到 $(x-y)(x+y+xy) = 0$ 。若 $x+y+xy = 0$, 由 $x, y \geq 0$ 得到 $x = y = 0$, 此时距离为 0, 不考虑。若 $x-y = 0$, 代入 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$, 解得 $x = y = \frac{3}{2}$, 此时距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。所以距离的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

15. (10 分)

(I) 用隐函数定理证明 $z^3 - 2xz + y = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 附近确定了一个 $C^{(2)}$ 类隐函数 $z = z(x, y)$;

(II) 求函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0) = (1, 1)$ 处的二阶 Taylor 多项式。

解析:

(I) 记 $F(x, y, z) = z^3 - 2xz + y$, 则显然 $F \in C^{(2)}$, 且 $F'_3(1, 1, 1) = 1 \neq 0$, 由隐函数定理, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 附近确定了一个 $C^{(2)}$ 类隐函数 $z = z(x, y)$ 。

(II) 想求二阶 Taylor 多项式, 只需要求出各阶偏导数, 方程两边同时对 x 和 y 求导, 得到:

$$\begin{aligned} 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

代入 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, 解方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -1$ 。继续对上面两个方程两边对 x 和 y 求导, 得到:

$$\begin{aligned} 6z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \\ 6z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\ 6z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

代入 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, 解方程得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) = -16$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 1) = -6$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = 10$ 。

代入 Taylor 多项式公式, 得到二阶 Taylor 多项式为

$$1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 - 3(y-1)^2 + 10(x-1)(y-1).$$

注: 第二部分的求导计算量可能较大, 在充分熟悉泰勒展开的情况下, 也有如下的做法:

先做平移, 记 $u = x-1, v = y-1, w = z-1$, 则方程变为 $(w+1)^3 - 2(u+1)(w+1) + (v+1) = 0$, $w^3 + 3w^2 + w - 2uw + (v-2u) = 0$, 考虑一阶部分, 得到 $w + o(w) + v - 2u = 0$, 所以 $w = 2u - v + o(\sqrt{u^2 + v^2})$, 即一阶泰勒多项式为 $z = 1 + 2(x-1) - (y-1)$ 。

进一步设 $\Delta w = w - (2u - v)$, 则 Δw 是一个二阶小量, 则方程变为 $(\Delta w + 2u - v)^3 + 3(\Delta w + 2u - v)^2 + (\Delta w + 2u - v) - 2u(\Delta w + 2u - v) + (v - 2u) = 0$, 考虑二阶部分, 得到 $\Delta w + (8u^2 - 10uv + 3v^2) + o(u^2 + v^2) = 0$, 解得 $\Delta w = -8u^2 + 10uv - 3v^2 + o(u^2 + v^2)$, 所以二阶泰勒多项式为 $1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 - 3(y-1)^2 + 10(x-1)(y-1)$ 。

16. (15 分) 设 $f(x, y) = e^{xy} + \frac{x^2 + y^2}{2e}$ 。

(I) 求 $f(x, y)$ 的所有驻点, 讨论驻点是否为极值点, 并判断极值点类型。

(II) 求 $f(x, y)$ 的值域。

解析:

(I) 先求驻点:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} + \frac{x}{e} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy} + \frac{y}{e} = 0. \end{aligned}$$

解得有三个驻点 $(0, 0), (1, -1), (-1, 1)$, 为判断极值点类型, 计算在各点处的 Hessian 矩阵:

在 $(0, 0)$ 处, $H = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{bmatrix}$, 不定, 所以不是极值点。

在 $(1, -1)$ 处, $H = \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}$, 正定, 所以是极小值点。

在 $(-1, 1)$ 处, $H = \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}$, 正定, 所以是极小值点。

(II) 显然, 当 $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ 时, $f(x, y) > \frac{x^2 + y^2}{2e} \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x, y)$ 无上界。

法一: 我们来证明, 此时 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一定有最小值 (《高等微积分教程 (下)》P.24 1.3.8)。

由于当 $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ 时, $f(x, y) \rightarrow +\infty$, 所以存在 $M > 0$ 使得当 $x^2 + y^2 > M$ 时, $f(x, y) > f(0, 0)$ 。又由于 $f(x, y)$ 在闭圆盘 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq M\}$ 上连续, 所以 $f(x, y)$ 在该闭圆盘上有最小值, 设最小值点为 (x_0, y_0) , 则 $f(x_0, y_0) \leq f(0, 0)$, 也就是对任意圆盘外的 (x, y) , 也有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 所以 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点。

既然 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值点, 那么该最小值点一定是极小值点, 结合第 (I) 问的结论, 最小值点只能是 $(1, -1)$ 或 $(-1, 1)$, 所以 $f(x, y)$ 的最小值为 $\frac{2}{e}$ 。值域是 $[\frac{2}{e}, +\infty)$ 。

法二: 给出一种不等式分析说明下界的方法, 由均值不等式 $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, 可得 $f(x, y) \leq e^{xy} + \frac{|xy|}{e}$ 。当 $xy \geq 0$ 时, $e^{xy} + \frac{|xy|}{e} \geq 1 + 0 = 1$; 当 $xy < 0$ 时, 设 $t = -xy > 0$, 则 $e^{xy} + \frac{|xy|}{e} = e^{-t} + \frac{t}{e}$, 由函数 $g(t) = e^{-t} + \frac{t}{e}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值 $\frac{2}{e}$, 所以 $f(x, y) \geq \frac{2}{e}$ 。而当 $(x, y) = (1, -1)$ 或 $(-1, 1)$ 时, $f(x, y) = \frac{2}{e}$, 所以 $f(x, y)$ 的值域为 $[\frac{2}{e}, +\infty)$ 。

注: 不可以直接由 $(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$ 是极小值点就得出 $f(x, y)$ 的下界为 $\frac{2}{e}$ 。极小值点不一定是最小值点, 但 $\mathbb{R}^n$ 上的最小值点 (如果存在) 一定是极小值点。此外, 根据多年经验, 书上例题结论是可以直接用的, 但习题不能保证, 推荐大题中证明一遍。

17. (5 分) 设 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且满足对任意 (x, y) 都有 $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$, $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$ 且 $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = \text{常数}$ 。证明: $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均为常数函数。

解析: 设 $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = C$ 。

若 $C = 0$, 则 $u(x, y) \equiv 0, v(x, y) \equiv 0$, 结论成立。

若 $C \neq 0$, 对 $u^2 + v^2 = C$ 两边同时对 x 和 y 求导, 得到:

$$uu'_x + vv'_x = 0$$

$$uu'_y + vv'_y = 0$$

将题目条件代入 $uu'_y + vv'_y = 0$, 得到 $vu'_x - uv'_x = 0$, 联立方程组

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0, \\ vu'_x - uv'_x = 0, \end{cases}$$

解得 $u'_x = 0, v'_x = 0$ 。同理可得 $u'_y = 0, v'_y = 0$ 。由于 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的所有偏导数处处为 0, 由拉格朗日中值定理, 可得 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均为常数函数。