

2025 级微积分 A2 期中考试

mathsdream 整理版

2026.4.18

说明

2025 级微积分 A2 期中考试依然为选择题形式。题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

一、选择题（每题 4 分，共 25 题）

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} = \underline{\hspace{2cm}}$
A. 0
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. 不存在
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$
A. 0
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. 不存在
- 考虑二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 和两个累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 。以下叙述正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$
A. 若重极限存在，则两个累次极限均存在。
B. 若重极限存在，一个累次极限存在，则这两者相等。
C. 若两个累次极限存在（不必相等），则重极限也存在。
D. 若两个累次极限均存在且相等，则重极限也存在，且这三个极限相等。
- 已知 $f(x, y) = \int_0^{xy} \cos(t^2) dt$ ，则 f 在点 $(1, \sqrt{\pi})$ 的全微分为 $\underline{\hspace{2cm}}$
A. $-(\sqrt{\pi} dx + dy)$
B. $-(dx + \sqrt{\pi} dy)$

- C. 0
- D. $\sqrt{\pi}dx + dy$
5. 设函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。以下叙述正确的是 _____
- A. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。
- B. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。
- C. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在。
- D. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在。
6. 已知 $z = \frac{2xye^{x-1}}{x^2 - y^2}$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$
- A. 4
- B. 2
- C. 0
- D. -4
7. 已知 $f(x, y) = \ln(y + |x \sin y|)$, 则以下结论正确的是 _____
- A. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ 不存在。
- B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ 存在。
- C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ 不存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ 不存在。
- D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ 不存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ 存在。
8. 已知 $f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$, 则以下结论正确的是 _____
- A. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续。
- B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ 不存在。
- C. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微。
- D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ 。
9. 以下条件中, 可以推出二元函数 f 在点 $(0, 0)$ 处连续的是 _____
- A. f 在点 $(0, 0)$ 的邻域内, f 关于第一个变量连续, 关于第二个变量的偏导函数连续。
- B. f 在点 $(0, 0)$ 沿各方向的方向导数都存在。
- C. 在点 $(0, 0)$ 关于两个变量的偏导数都存在。
- D. 在点 $(0, 0)$ 的邻域内, f 关于两个变量分别连续。

10. 函数 $f(x, y, z) = ze^{x+y+z}$ 在点 $(1, 1, -1)$ 的最大方向导数为 _____
- A. 0
B. $-e$
C. $\sqrt{2}e$
D. $\sqrt{6}e$
11. 方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 在点 $(0, 2, 1)$ 附近确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} =$ _____
- A. 2
B. 0
C. 1
D. -1
12. 在原点 $(0, 0)$ 附近考察方程 $y - x - \sin y = 0$, 则以下结论正确的是 _____
- A. 该方程在原点附近不能确定隐函数 $y = f(x)$ 。
B. 该方程在原点附近可以确定唯一的隐函数 $y = f(x)$, 该隐函数在 $x = 0$ 处不可导。
C. 该方程在原点附近可以确定唯一的隐函数 $y = f(x)$, 且该隐函数在 $x = 0$ 处可导。
D. 该方程在原点附近确定的隐函数 $y = f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ 。
13. 设 f 在点 (x_0, y_0) 的邻域中有定义。以下叙述正确的是 _____
- A. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向的方向导数都存在, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处连续。
B. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向的方向导数都存在, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处可微。
C. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向 $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的方向导数都存在, 且 $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \theta$, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处可微。
D. 若 f 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在任意方向的方向导数都存在。
14. 函数 $f(x, y) = e^{x+y^2} \cos(x-y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的 Taylor 展开式中, x^2y 项系数是 _____
- A. $\frac{1}{2}$
B. 1
C. $-\frac{1}{2}$
D. -1
15. 已知二阶连续可微的函数 $f(u, v)$ 在点 $(0, 0)$ 的 Taylor 公式为

$$f(u, v) = 1 + 2u + 3v + u^2 - uv + v^2 + o(u^2 + v^2), \quad (u, v) \rightarrow (0, 0).$$

令 $w = f(x + y + z, x^2yz)$, 则 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}(0, 1, -1) =$ _____

- A. 0

- B. 2
C. 4
D. 6
16. 设空间曲线 Γ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 则曲线 Γ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处的切线与 z 轴正方向所成锐角的余弦值为 _____
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
17. 曲面 $x^2 + \cos(xyz) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 _____
- A. $x - y + z = -2$
B. $x + y + z = 0$
C. $x - 2y + z = -3$
D. $x - y - z = 0$
18. 已知 $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$, 则以下结论错误的是 _____
- A. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值无最小值
B. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上既无最大值也无最小值
C. f 有唯一极值点 $(-2, -2)$
D. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值为 8
19. 曲线 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 上的点到直线 $x + y = 8$ 的最短距离为 _____
- A. $4\sqrt{2} + 2$
B. $2\sqrt{2} + 2$
C. $4\sqrt{2} - 2$
D. $2\sqrt{2} - 2$
20. 已知 f 在点 $(0, 0)$ 连续, 且 $f(x, y) = (x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, 由此不能得到的结论是 _____
- A. f 在点 $(0, 0)$ 可微。
B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ 。
C. 点 $(0, 0)$ 是 f 的极小值点。
D. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ 。
21. 关于 $f(x, y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$ 的极值与最值, 以下结论正确的是 _____

- A. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极小值点, 也是最小值点。
 B. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极大值点, 但不是最大值点。
 C. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极小值点, 但不是最小值点。
 D. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极大值点, 也是最大值点。
22. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \neq 0$ 。若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点。以下叙述正确的是 _____
- A. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 。
 B. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 。
 C. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 。
 D. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 。
23. 已知 $J(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$, 则 $J'(0) =$ _____
- A. $\frac{1}{2}(e-3)$
 B. $-\frac{1}{2}(e+1)$
 C. -1
 D. e
24. 关于含参积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$, 以下结论正确的是 _____
- A. $I(\alpha)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛。
 B. 任意给定 $\delta > 0$, $I(\alpha)$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。
 C. $I(\alpha)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一致收敛。
 D. $I(\alpha)$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上都不一致收敛。
25. 记 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - \cos x}{x} dx$ ($\alpha > 0$), 以下结论正确的是 _____
- A. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $0 < \alpha < 1$ 时发散, 在 $\alpha \geq 1$ 时收敛。
 B. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $0 < \alpha \leq 1$ 时发散, 在 $\alpha > 1$ 时收敛。
 C. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛, 但 $I(\alpha)$ 不连续。
 D. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛, $I(\alpha)$ 可导, 且 $I'(1) = -1$ 。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

答案速查

1-5: A D B A B

6-10: C D C A C

11-15: C B D B B

16-20: A A B C D

21-25: C D A B D

一、选择题解析（每题 4 分，共 25 题）

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} = A$

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 不存在

解析：有理分式，且在 $(0,0)$ 附近分子是 3 次，分母是 2 次，如果极限存在则必然是 0，而分母的 $x^2 + y^2$ 则几乎可以让我们确认这件事。一般使用夹逼证明极限是 0：

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} \right| &\leq \frac{|x||y|^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

由夹逼定理，原式极限存在且为 0。

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = D$

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 不存在

解析：见《高等微积分教程（下）》P.15 例 1.3.3。当 (x, y) 沿 $y = kx^2$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

极限为 $\frac{k}{1 + k^2}$ ，与 k 有关，因此原式极限不存在。

3. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 和两个累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 。以下叙述正确的是 B

- A. 若重极限存在, 则两个累次极限均存在。
 B. 若重极限存在, 一个累次极限存在, 则这两者相等。
 C. 若两个累次极限存在 (不必相等), 则重极限也存在。
 D. 若两个累次极限均存在且相等, 则重极限也存在, 且这三个极限相等。

解析: 关于重极限和累次极限, 我们只有一个结论: 若重极限和累次极限都存在, 则这两者相等。此即 B 选项, B 选项正确。

A: 重极限的存在性无法保证累次极限的存在性, 例如 $\begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

C、D: 例如 $\begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

4. 已知 $f(x, y) = \int_0^{xy} \cos(t^2) dt$, 则 f 在点 $(1, \sqrt{\pi})$ 的全微分为 A

- A. $-(\sqrt{\pi} dx + dy)$
 B. $-(dx + \sqrt{\pi} dy)$
 C. 0
 D. $\sqrt{\pi} dx + dy$

解析: 要求全微分, 就是需要求两个偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos((xy)^2) \cdot y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos((xy)^2) \cdot x. \end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{\pi}) = -1$, 全微分为 $-(\sqrt{\pi} dx + dy)$, 选 A。

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。以下叙述正确的是 B。

- A. 若极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。
 B. 若极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。
 C. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在。
 D. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在。

解析: 复习可微的定义: 对二元函数 $f(x, y)$, 若存在常数 A 和 B 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微。

- A. 考虑反例 $f(x, y) = |x| + |y|$, 则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = 1$ 存在, 但 f 在 $(0, 0)$ 处不可微。A 错误。

B. 首先由极限存在, 以及函数 f 在 $(0,0)$ 处连续, 得到 $f(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2) = 0$, 其次, 可以得到 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0x - 0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, 因此 f 在 $(0,0)$ 处可微。B 正确。

C. 通过 B 的分析, 我们知道选项中的极限存在至少要求 $f(0,0) = 0$, 但一个 f 可微的条件是无法保证这件事的。随便选个反例: $f(x,y) = 1$ 。C 错误。

D. 同 C。D 错误。

6. 已知 $z = \frac{2xye^{x-1}}{x^2 - y^2}$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,1)} = C$

A. 4

B. 2

C. 0

D. -4

解析: 连续对 y 求偏导, 那就可以看成是 $g(y) = z(0,y) = 0$ 连续求两次导, 结果还是 0, 选 C。

7. 已知 $f(x,y) = \ln(y + |x \sin y|)$, 则以下结论正确的是 D

A. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ 不存在。

B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ 存在。

C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ 不存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ 不存在。

D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ 不存在, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ 存在。

解析: 首先, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |h \sin 1|) - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h \sin 1|}{h}$, 不存在; 其次, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,1+k) - f(0,1)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1+k) - \ln 1}{k} = 1$, 存在。选 D。

8. 已知 $f(x,y) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$, 则以下结论正确的是 C

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续。

B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 不存在。

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微。

D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ 。

解析: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$, 所以 f 在 $(0,0)$ 处连续,

A 错误。 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \arctan \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{|h|} = \frac{\pi}{2}$, 存在, B

错误, 且不为 0, D 错误。 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$ 。要说明可微, 即计算

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\pi}{2}x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \left(-\arctan \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 f 在 $(0,0)$ 处可微, C 正确。

9. 以下条件中, 可以推出二元函数 f 在点 $(0,0)$ 处连续的是 A

- A. f 在点 $(0,0)$ 的邻域内, f 关于第一个变量连续, 关于第二个变量的偏导函数连续。
- B. f 在点 $(0,0)$ 沿各方向的方向导数都存在。
- C. 在点 $(0,0)$ 关于两个变量的偏导数都存在。
- D. 在点 $(0,0)$ 的邻域内, f 关于两个变量分别连续。

解析:

A. 证明过程参考《高等微积分教程(下)》P.33 例 1.4.8。此处简要说明: $f(x,y) - f(0,0) = [f(x,y) - f(x,0)] + [f(x,0) - f(0,0)]$ 。由于 $f(x,y)$ 关于第一个变量连续, 所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,0) - f(0,0) = 0$; 由中值定理, 存在 ξ 介于 0 和 y 之间, 使得 $f(x,y) - f(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) \cdot y$, 又由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) \cdot y = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot 0 = 0$ 。因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) - f(0,0) = 0$, A 正确。

B. 反例: $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x \neq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$, 则 f 在 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在, 但 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在, B 错误。

C. 反例同 B, C 错误。

D. 反例: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$, 则 f 在 $(0,0)$ 的邻域内关于两个变量分别连续, 但 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在, D 错误。

10. 函数 $f(x,y,z) = ze^{x+y+z}$ 在点 $(1,1,-1)$ 的最大方向导数为 C

A. 0

- B. $-e$
 C. $\sqrt{2}e$
 D. $\sqrt{6}e$

解析: 首先计算梯度 $\text{grad}f(1, 1, -1) = (-e, -e, 0)$, 因此最大方向导数为 $\|\text{grad}f(1, 1, -1)\| = \sqrt{2}e$, 选 C。

11. 方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 在点 $(0, 2, 1)$ 附近确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = C$
- A. 2
 B. 0
 C. 1
 D. -1

解析: 选择 (x, y) 为自变量, z 为因变量, 方程两边求导有

$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2y}{1+4x^2y^2} = 0.$$

代入 $(x, y, z) = (0, 2, 1)$, 解得得到 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = 1$, 选 C。

12. 在原点 $(0, 0)$ 附近考察方程 $y - x - \sin y = 0$, 则以下结论正确的是 B

- A. 该方程在原点附近不能确定隐函数 $y = f(x)$ 。
 B. 该方程在原点附近可以确定唯一的隐函数 $y = f(x)$, 该隐函数在 $x = 0$ 处不可导。
 C. 该方程在原点附近可以确定唯一的隐函数 $y = f(x)$, 且该隐函数在 $x = 0$ 处可导。
 D. 该方程在原点附近确定的隐函数 $y = f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ 。

解析: 其可以看成是研究 $g(y) = y - \sin y$ 的反函数。 $g'(y) = 1 - \cos y \geq 0$, 且在 $y = 0$ 的去心邻域内有 $g'(y) > 0$, 因此 $g(y)$ 在某个包含 $y = 0$ 的区间上严格单调递增, 因此存在唯一的反函数 f 使得 $y = f(x)$, 即原方程可以在原点附近确定唯一的隐函数。更进一步研究在 0 处的可导性:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 0}{y - \sin y} = +\infty,$$

极限不存在, 所以该隐函数在 $x = 0$ 处不可导, 选 B。

注: 本题隐函数定理是失效的, 隐函数定理只是提供了隐函数存在的一个充分条件, 并非必要条件。

13. 设 f 在点 (x_0, y_0) 的邻域中有定义。以下叙述正确的是 D

- A. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向的方向导数都存在, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处连续。
 B. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向的方向导数都存在, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处可微。
 C. 若 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向 $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的方向导数都存在, 且 $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \theta$, 则 f 在点 (x_0, y_0) 处可微。

D. 若 f 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在任意方向的方向导数都存在。

解析: A、B、C 错误, 反例: $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x \neq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 则可以验证 f 在 $(0, 0)$ 处的任意

方向导数和偏导数都存在, 且都是 0, 但其在 $(0, 0)$ 处不连续, 更不可微; D 正确, 参见《高等微积分教程(下)》P.35 定理 1.4.6。

14. 函数 $f(x, y) = e^{x+y^2} \cos(x-y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的 Taylor 展开式中, x^2y 项系数是 B

- A. $\frac{1}{2}$
B. 1
C. $-\frac{1}{2}$
D. -1

解析:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x+y^2} \cos(x-y) \\ &= (1+x+y^2 + \frac{(x+y^2)^2}{2} + \frac{(x+y^2)^3}{6} + o(\rho^3))(1 - (x-y)^2/2 + o(\rho^3)) \\ &= (1+x + \frac{x^2}{2} + y^2 + xy^2 + \frac{x^3}{6} + o(\rho^3))(1 - \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + o(\rho^3)) \\ &= 1+x+xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2y + \frac{xy^2}{2} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

因此 x^2y 项的系数是 1, 选 B。

15. 已知二阶连续可微的函数 $f(u, v)$ 在点 $(0, 0)$ 的 Taylor 公式为

$$f(u, v) = 1 + 2u + 3v + u^2 - uv + v^2 + o(u^2 + v^2), \quad (u, v) \rightarrow (0, 0).$$

令 $w = f(x+y+z, x^2yz)$, 则 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}(0, 1, -1) =$ B

- A. 0
B. 2
C. 4
D. 6

解析:

$$\begin{aligned} w(0, y, z) &= f(y+z, 0) \\ \frac{\partial w}{\partial z}(0, y, z) &= f'_1(y+z, 0) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}(0, y, z) &= f''_{11}(y+z, 0). \end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}(0, 1, -1) = f''_{11}(0, 0)$, 由 f 的 Taylor 公式可知 $f''_{11}(0, 0) = 2$, 选 B。

注: 也可以通过直接代入, 得到 w 的泰勒展开, 再研究系数得到导数的方法解决。

16. 设空间曲线 Γ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 则曲线 Γ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处的切线与 z 轴正方向所成锐角的余弦值为 A

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析: 令 $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2x$, 计算 $\text{grad}F(1, 1, 2) = (-2, -2, 1)$, $\text{grad}G(1, 1, 2) = (0, 2, 0)$, 因此 Γ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处的切线方向向量为 $\text{grad}F \times \text{grad}G = (-2, 0, -4)$, 与 z 轴正方向的夹角余弦值为 $\frac{|v_z|}{\|v\|} = \frac{4}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 选 A。

17. 曲面 $x^2 + \cos(xyz) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 A

- A. $x - y + z = -2$
 B. $x + y + z = 0$
 C. $x - 2y + z = -3$
 D. $x - y - z = 0$

解析: 令 $F(x, y, z) = x^2 + \cos(xyz) + yz + x$, 计算 $\text{grad}F(0, 1, -1) = (1, -1, 1)$, 因此切平面方程为 $1(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z + 1) = 0$, 即 $x - y + z = -2$, 选 A。

18. 已知 $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$, 则以下结论错误的是 B

- A. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值无最小值
 B. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上既无最大值也无最小值
 C. f 有唯一极值点 $(-2, -2)$
 D. f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值为 8

解析: 计算 $\text{grad}f(x, y) = (y - 2x - 2, x - 2y - 2)$, 令梯度为 0, 解得唯一的驻点为 $(-2, -2)$, 进一步计算 $\text{Hess}f(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, 其为负定矩阵, 说明 f 在 $(-2, -2)$ 处取得极大值, 且该极大值为 $f(-2, -2) = 8$, 所以 C 正确。为确定最值, 需要考虑无穷远处, 由 $xy - x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}(x - y)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 可知 $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$, 所以 f 无最小值, 有最大值, 则最大值点是极大值点, 所以 A, D 正确, B 错误, 选 B。

19. 曲线 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 上的点到直线 $x + y = 8$ 的最短距离为 C

- A. $4\sqrt{2} + 2$
 B. $2\sqrt{2} + 2$
 C. $4\sqrt{2} - 2$
 D. $2\sqrt{2} - 2$

解析: 点 (x, y) 到直线 $x + y = 8$ 的距离为 $\frac{|x + y - 8|}{\sqrt{2}}$, 因此需要最小化函数 $g(x, y) = (x + y - 8)^2$, 约束条件为 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 。设拉格朗日函数 $L = (x + y - 8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y)$, 计算拉格朗日梯度:

$$\begin{cases} 2(x + y - 8) + \lambda(2x + 2y) = 0, \\ 2(x + y - 8) + \lambda(2x + 6y - 8) = 0, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0. \end{cases}$$

联立前两个方程得到 $\lambda(2x + 2y) = \lambda(2x + 6y - 8)$, 进一步即可解出所有驻点为: $(-2 + 2\sqrt{2}, 2), (-2 - 2\sqrt{2}, 2)$, 进一步计算, 得到 $(-2 + 2\sqrt{2}, 2)$ 是最小值点, 最短距离为 $\frac{|-2 + 2\sqrt{2} + 2 - 8|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 2$, 选 C。

20. 已知 f 在点 $(0, 0)$ 连续, 且 $f(x, y) = (x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, 由此不能得到的结论是 D

- A. f 在点 $(0, 0)$ 可微。
- B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ 。
- C. 点 $(0, 0)$ 是 f 的极小值点。
- D. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ 。

解析: 首先, 由 f 在点 $(0, 0)$ 连续, 得到 $f(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$; 其次, 由 $f(x, y) = (x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$, 得到 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 因此 f 在点 $(0, 0)$

处可微, A 正确; 由 f 在点 $(0, 0)$ 处可微, 及其全微分系数, 得到 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$,

B 正确; 由 $f(x, y) = (x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$, 得到 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2} = 1 > 0$, 因此存在一个 $(0, 0)$ 的邻域, 在该邻域上有 $f(x, y) \geq f(0, 0)$, 所以点 $(0, 0)$ 是 f 的极小值点, C

正确; 考虑反例 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + y^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ x^2 + y^2, & x = 0. \end{cases}$, 则其满足题目, 考虑其在 $(0, y)$

处的 $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

当 $y \neq 0$ 时, 极限不存在, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ 不存在, 进而 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ 不存在, D 错误, 选 D。

21. 关于 $f(x, y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$ 的极值与最值, 以下结论正确的是 C

- A. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极小值点, 也是最小值点。
- B. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极大值点, 但不是最大值点。
- C. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极小值点, 但不是最小值点。

D. $(1, 0)$ 是 $f(x, y)$ 唯一的极大值点, 也是最大值点。

解析: 计算 $\text{grad}f(x, y) = (3x^2 - 3e^y, 3e^{3y} - 3xe^y)$, 令梯度为 0, 解得唯一的驻点为 $(1, 0)$, 进一步计算 $\text{Hess}f(1, 0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$, 正定, 所以 $(1, 0)$ 是唯一极小值点。但当 $(x, y) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ 时, $f(x, y) \rightarrow -\infty$, 所以 $(1, 0)$ 不是最小值点, 选 C。

22. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \neq 0$ 。若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点。以下叙述正确的是 D

A. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 。

B. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 。

C. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 。

D. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 。

解析: 由拉格朗日乘数法, 存在 λ 使得 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$, 而 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \neq 0$, 所以 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 当且仅当 $\lambda = 0$ 。而 $\lambda = 0$ 会导致 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, 所以若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, 则必有 $\lambda \neq 0$, 进而 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, 选 D。

23. 已知 $J(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$, 则 $J'(0) = A$

A. $\frac{1}{2}(e-3)$

B. $-\frac{1}{2}(e+1)$

C. -1

D. e

解析:

$$J'(x) = e^{\cos^2 x + x \cos x} \cdot (-\sin x) - e^{\sin^2 x + x \sin x} \cdot \cos x + \int_{\sin x}^{\cos x} te^{t^2+xt} dt.$$

代入 $x = 0$, 得到:

$$J'(0) = e^1 \cdot 0 - e^0 \cdot 1 + \int_0^1 te^{t^2} dt = \frac{1}{2}(e-3)$$

选 A。

24. 关于含参积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$, 以下结论正确的是 B

A. $I(\alpha)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛。

B. 任意给定 $\delta > 0$, $I(\alpha)$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。

C. $I(\alpha)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一致收敛。

D. $I(\alpha)$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上都不一致收敛。

解析：介绍一个判断广义含参积分一致收敛的方法（其实是定义的等价形式）：若 $\forall y \in I$, $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty)$ 上广义可积, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in I$ 一致收敛的充要条件是:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{y \in I} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| = 0.$$

对于这题, $\int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha A}$, 若 I 是一个 δ 为下界的区间, 则 $\sup_{\alpha \in I} \left| \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = e^{-\delta A}$. 此时有两种情况: 若 $\delta > 0$, 则 $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\delta A} = 0$, $I(\alpha)$ 在区间 I 上一致收敛; 若 $\delta = 0$, 则 $e^{-\delta A} = 1$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} 1 = 1$, $I(\alpha)$ 在区间 I 上不一致收敛. 故选 B.

25. 记 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - \cos x}{x} dx$ ($\alpha > 0$), 以下结论正确的是 D

- A. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $0 < \alpha < 1$ 时发散, 在 $\alpha \geq 1$ 时收敛.
- B. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $0 < \alpha \leq 1$ 时发散, 在 $\alpha > 1$ 时收敛.
- C. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛, 但 $I(\alpha)$ 不连续.
- D. 含参积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛, $I(\alpha)$ 可导, 且 $I'(1) = -1$.

解析：先看看什么时候收敛, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha x} - \cos x}{x} = -\alpha$, 所以 $x = 0$ 是一个可去瑕点, 不用在意. 考虑 $(1, +\infty)$ 上的积分, 当 $\alpha > 0$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx$ 和 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 都收敛, 所以 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时收敛. A, B 错误.

再考虑连续可导性, 直接一步到位说明 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时可导: $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - \cos x}{x} \right) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$, 由 Weierstrass 判别法, 在 $\alpha \geq \delta > 0$ 的区间上, $e^{-\alpha x} \leq e^{-\delta x}$, 又 $\int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛, 因此 $I(\alpha)$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上可导, 由于 δ 是任意的, 所以 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时可导. 进一步计算 $I'(1) = - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -1$, D 正确. 既然 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时可导, 那么 $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时连续, 所以 C 错误, 选 D.