

1) 选 a)

考虑 $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m = \mathbb{F}^{n+m}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m) \cong M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

2) 选 b)

反例.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ 可对角化

其中 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\sqrt{-1}$ & $-\sqrt{-1}$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 特征多项式为 $\chi(\chi-2)+1 = (\chi-1)^2$
特征值^{只有}为 1.

$$\dim E(1, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \dim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

则 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不可对角化.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ 都是零

但 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不都是零 (可逆)

d) 同上.

3) 选 a)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T((x_1, x_2)) = (x_2, 0)$$

2. 1) $E(1, S) = \{ A \in M_{n \times n} \mid A = SA \text{ i.e. } A = A^T \}$

= { 所有 $n \times n$ 的对称阵 }

则 $E_{ij} + E_{ji}$ 可构成 $E(1, S)$ 的一组基.

$$\dim(E(1, S)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$E(-1, S) = \{ A \in M_{n \times n} \mid SA = -A \text{ i.e. } A = -A^T \}$$

= { 所有 $n \times n$ 的反对称阵 }

则 $E_{ij} - E_{ji}$ 可构成 $E(-1, S)$ 的一组基

$$\dim(E(-1, S)) = \frac{n^2-n}{2}$$

(注: E_{ij} 为 (i, j) 位置为 1, 其他位置为 0 的 $n \times n$ 阶矩阵

则 E_{ij} 为 $M_{n \times n}$ 的一组基)

2) 可对角化 $E(1, S) \wedge E(-1, S) = \{0\}$ (特征值不同)

$$\begin{aligned} \dim E(1, S) + \dim E(-1, S) \\ = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2 = \dim M_{n \times n} \end{aligned}$$

$$\text{即 } E(1, S) \oplus E(-1, S) = M_{n \times n}$$

3. 1) $\forall f \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$ 即可设 $f = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$$D(f) = 2ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

则 $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 为 $D|_{\mathbb{P}_2}$ 的不变子空间.

2) $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ 为 $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ 的一组基

$$1, x, x^2 \in U = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

则 $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})/U$ 的一组基可表示为 (x^3+U, x^4+U)

$$D|_U(x^3+U) = U$$

$$D|_U(x^4+U) = 4(x^3+U)$$

则. 表示矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^3+U, x^4+U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3+U \\ x^4+U \end{pmatrix}$$

3) 同 1) 可知 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ 中 D 下的不变子空间

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 中 D 下的不变子空间

则 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})/U$ 为 $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})/U$ 中 D 下的不变子空间

4. 1)

设 $g \in \mathcal{L}(V)$ g s.t. $g(v) = 0$

则 $g(U) = \{0\} \subset U \Rightarrow g \in \mathcal{L} \quad (0 \text{ 映射})$

$\forall a, b \in F \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{L} \quad \forall v \in U$

$$(aT_1 + bT_2)(v) = aT_1(v) + bT_2(v)$$

$$T_1, T_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow T_1(v) \in U, T_2(v) \in U$$

$$\Rightarrow aT_1(v), bT_2(v) \in U \Rightarrow (aT_1 + bT_2)(v) \in U$$

$$\Rightarrow aT_1 + bT_2 \in \mathcal{L}$$

2) 设 $u_1, \dots, u_m$ 为 U 的一组基

可扩展为 V 的一组基 $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$

则 $\mathcal{L}(V) \cong M_{n \times n}$

设 $F \in \mathcal{L}$ 表示矩阵记为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$

$$A_1 \in M_{m \times m} \quad A_3 \in M_{(n-m) \times m} \quad A_2 \in M_{m \times (n-m)}$$

$$A_4 \in M_{(n-m) \times (n-m)}$$

$$U = \{ x_1 u_1 + \dots + x_m u_m + 0 u_{m+1} + \dots + 0 u_n \mid x_i \in F \}$$

$$\text{记为 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in F^m$$

$$\text{则 } F \in \mathcal{L} \quad F(U) \subset U \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x \\ A_3 x \end{pmatrix} \in U \Rightarrow A_3 x = 0 \quad \forall x \in F^m$$

$$\Rightarrow A_3 = 0 \Rightarrow L \subset \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} \mid A_1 \in \dots \right\}$$

$$\forall B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \quad B_1 \in M_{m \times m} \quad B_2 \in M_{m \times (n-m)} \quad B_4 \in M_{(n-m) \times (n-m)}$$

$$\Rightarrow B \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 x \\ 0 \end{pmatrix} \in U \quad \forall x \in F^m$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \mid \dots \right\} \subset L$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \mid \dots \right\} = L$$

$$\dim L = n^2 - m(n-m) = n^2 + m^2 - mn$$