

1. 设 $T: V \rightarrow V$ 是一个幂零变换,
设 $v \neq 0 \in V$, $C_v = \text{Span}\{v, T(v), \dots,$
 $T^k(v), \dots\}$. 证明:

C_v 是极大循环子空间, 即不存在
 $w \in V$, $C_v \subsetneq C_w \iff v \notin \text{Im } T$.

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 证明: A 和 A^T
相似. (提示: A 和 A^T 有相同的
Jordan 标准型)

(2) 设 $J = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$ 求可逆阵 P

使得 $P^{-1}JP = J^T$

3. 设 $a \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ & a & a & a \\ & & a & a \\ & & & a \end{pmatrix}$

求 A 的 Jordan 标准型.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\text{rank}(A) = 1$.

求 A 的 Jordan 标准型.

5. 求下列方阵 Jordan 标准型 J
并求复方阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

6. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $|\lambda I_n - A| = (\lambda + 2)^4 (\lambda - 1)^2$, 则 A 的 Jordan 标准型有几种可能? (不计子块顺序)

7. 设 $A \in M_3(\mathbb{C})$, 且 A 的任意特征值 λ 满足 $|\lambda| < 1$.

证明: $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0$

(提示: 只需证明一个 Jordan 块)

$J = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}_{K \times K} \triangleq \Lambda$ 满足 $|\lambda| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J^n = 0$,

$J = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}_{K \times K} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{K \times K} \triangleq N \quad (K \leq 3)$

$$J^n = (\Lambda + N)^n = \sum_{l=0}^n C_n^l \Lambda^{n-l} N^l$$

$$= \Lambda^3 + C_n^1 \Lambda^2 N + C_n^2 \Lambda N^2$$

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ 求 A^m ($m \geq 1$)