

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

求 A 的 Jordan 标准型 J , 和可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

求 A 的 Jordan 标准型, 和可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = J$

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 若 A 有 n 个互异特征值. 证明: A 的特征多项式等于极小多项式.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 若 $m_A(x)$ 的次数等于 n , 证明: A 的 Jordan 标准型的各个 Jordan 块的主对角线元素互不相同.

(转下页)

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^2 = A$.

证明: $|\lambda I_n - A| = \lambda^m (\lambda - 1)^{n-m}$

其中 $m = \dim_{\mathbb{C}} N(A)$

6. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $m_A(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 5x + 4$.

证明: A 可逆并求 A^{-1} 的极小多项式.

(提示: 若 $a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$

且 A 可逆, 则 (两边乘 A^{-k}).

$$a_k I_n + a_{k-1} A^{-1} + \dots + a_1 (A^{-1})^{k-1} + a_0 A^{-k} = 0$$

7. 设 x_1, x_2, x_3 是 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的 3 个根, 求这 3 个根倒数的平方和.

8. 设 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$
 $g(x) = x^3 - 2x + 1$

求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$.

并求 $u(x), v(x)$

使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$.

解答:

$$1. |\lambda I_4 - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^3$$

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = 2$$

$$r(A - 2I) = 3 \Rightarrow \text{关于 } \mu_2 \text{ 只有一个 Jordan 块}$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)x = 0 \Rightarrow x = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P} = (v_1, (A - 2I_4)^2 v_2, (A - 2I_4)v_2, v_2)$$

$$(A - 2I_4)x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 2I_4)^2 v_2$$

$$(A - 2I_4)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 2I_4)v_2$$

$$(A - 2I_4)X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注: 本题 $(A - 2I_4)\vec{\alpha} = \vec{0}$

则 $(A - 2I_4)x = \vec{\alpha}$ 必有解

因为 $r(A - 2I_4) = 3$, 关于 $\mu_2 = 2$
只有一个 Jordan 块, 对应一个长度
= 3 的 Jordan 链,

$$(A - 2I_4)^2 v, (A - 2I_4)v, v$$

其中 $(A - 2I_4)^2 v$ 是 $\mu_2 = 2$ 的特征向量

但是:

$$\dim N(A - 2I_4) = 1$$

$$\Rightarrow (A - 2I_4)^2 v = c\vec{\alpha}, \quad c \neq 0 \in \mathbb{C}$$

$$2. |\lambda I_4 - A| = (\lambda - 1)^4$$

$$r(A - I) = 2 \quad r(A - I)^2 = 0$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } P = ((A - I)v_1, v_1, (A - I)v_2, v_2)$$

因为 $(A - I)^2 = 0$, 取 $A - I$ 的两个
无关列作为 $(A - I)v_1, (A - I)v_2$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } v_1 = e_2, \quad v_2 = e_3$$

则 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. 设 $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$
 $\quad \quad \quad = f(\lambda)$

因为 $m_A(\lambda_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$

$\Rightarrow f(\lambda) \mid m_A(\lambda)$

但 $m_A(\lambda) \mid f(\lambda)$, 二者均为首一多项式

$\Rightarrow m_A(\lambda) = f(\lambda)$

4. 若 $\deg m_A(\lambda) = n$

$$m_A(\lambda) \mid f_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| \quad \text{二者均首一}$$

$$\Rightarrow m_A(\lambda) = f_A(\lambda)$$

$$\text{设 } f_A(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \mu_s)^{n_s} \\ i \neq j \quad \mu_i \neq \mu_j$$

$$\text{设 } m_A(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \mu_s)^{m_s}$$

因为 m_i 是关于 μ_i 的 Jordan 块阶数, 又 $m_i = n_i$, 只有一个关于 μ_i 的 Jordan 块.

5. 证明: $A^2 = A \Rightarrow f(x) = x^2 - x$
是 A 的化零多项式 $f(x) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ 或 1

$\Rightarrow f(x)$ 是 $m_A(x)$

因为 $m_A(x)$ 无重根, A 可对角化

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_m & & \\ & \underbrace{1 \cdots 1}_{n-m} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{rank}(A) = n - m$$

6. 因为 $m_A(A) = 0$

$$A^5 + 2A^4 - 7A^3 - 6A^2 + 5A + 4I_n = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^4 + 2A^3 - 7A^2 - 6A + 5I_n)$$

↓ 两边乘上 A^{-5}

$$4A^{-5} + 5A^{-4} - 6A^{-3} - 7A^{-2} + 2A^{-1} + I_n = 0$$

$$\Rightarrow 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \text{ 是}$$

A^{-1} 的化零多项式.

若 $g(x) = a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$

是 A^{-1} 的化零多项式

$$a_4(A^{-1})^4 + \dots + a_1A^{-1} + a_0I_n = 0$$

两边乘 A^4 , 得

$$a_0 A^4 + a_1 A^3 + \dots + a_4 I_{\mathbb{R}} = 0$$

但 $m_A(x)$ 是极小的 $\Rightarrow a_0 = \dots = a_4 = 0$

$$\begin{aligned} 7. & \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} \\ &= \frac{q^2 - 2Pr}{r^2} \end{aligned}$$

$$8. \quad d(x) = x - 1$$

$$= (x+1)f(x) - x^2 g(x)$$

$$\begin{pmatrix} f(x) & : & 1 & 0 \\ g(x) & : & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-x r_2 + r_1} \begin{pmatrix} f(x) & : & 1 & -x \\ g(x) & : & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= x^3 + x^2 - x - 1$

$$\xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} x^2 - x & : & 1 & -x + 1 \\ x^3 - 2x + 1 & : & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-x r_1 + r_2} \begin{pmatrix} x^2 - x & : & 1 & -x + 1 \\ x^2 - 2x + 1 & : & -x & x^2 - x + 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2 + r_1} \left(\begin{array}{c|cc} x-1 & x+1 & -x^2 \\ \hline x^2-2x+1 & -x & x^2-x+1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-(x-1)r_1 + r_2} \left(\begin{array}{c|cc} \boxed{x-1} & \boxed{x+1} & \boxed{-x^2} \\ \hline 0 & -2x-1 & * \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow d(x) = x-1$$

$$u(x) = x+1$$

$$v(x) = -x^2.$$