

数值分析·期中

YL

2019数值分析期中

一、导论

二、非线性方程求根

三、线性方程组直接解法

四、线性方程组迭代解法



2019.4.17 9:50-10:55 (差不多1h)

一、导论

1.1 误差 准确值 x

近似值 $\hat{x}$

绝对误差 $e(\hat{x}) = \hat{x} - x$

相对误差 $e_r(\hat{x}) = \frac{\hat{x} - x}{x} = \frac{\hat{x} - x}{\hat{x}}$

误差限 $\varepsilon(\hat{x})$

相对误差限 $\varepsilon_r(\hat{x}) = \frac{\varepsilon(\hat{x})}{\hat{x}}$

1.2 有效数字

有效数字 $\longrightarrow$ 误差限

$$\hat{x} \text{ 有 } p \text{ 位有效数字} \longrightarrow |e_r(\hat{x})| < \frac{1}{d_0} \times 10^{-p+1}$$

$$\hat{x} \text{ 保留 } p \text{ 位有效数字} \longrightarrow |e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2d_0} \times 10^{-p+1}$$

(考虑四舍五入)

(d_0 为 $\hat{x}$ 的第一位有效数字)

1.2 有效数字

误差限 $\longrightarrow$ 有效数字

$$|e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2(d+1)} \times 10^{-p+1}$$

↓ do取9

$$|e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-p}$$

保留p位后, $\hat{x}$ 与x相等

1.2 有效数字

有效数字

误差限

有 p 位



$$1/d_0 \cdot 10^{-p+1}$$

保留 p 位



$$1/2d_0 \cdot 10^{-p+1}$$

保留 p 位



$$1/2(d_0+1) \cdot 10^{-p+1}$$

$$1/2 \cdot 10^{-p}$$

1. 对于准确结果为三千多的一个量，它至少前几位有效数字是准确的（考虑“四舍五入”）才一定使其误差不超过2%？

$$1. \quad P=2, \quad |e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2 \times 3} \times 10^{-P+1} = 1.67 \times 10^{-2}.$$

$2 \times d_0$

定理1.2. $\hat{x}$ 保留 P 位有效数字与 x 一样

$$\Rightarrow |e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2d_0} \times 10^{-P+1}.$$

2. 一个值为三千多的计算结果，若已知误差不超过0.1%，问它前几位有效数字一定是正确的（含“四舍五入”后正确）？

$$2. \quad P=3, \quad 0.1\% < \frac{1}{2(3+1)} \times 10^{-P+1}$$

定理1.3 若 $\hat{x}$ 满足 $|e_r(\hat{x})| \leq \frac{1}{2(d_0+1)} \times 10^{-P+1}$ 则 $\hat{x}$ 前 P 位正确或保留 P 位后正确

1.3 条件数：反应解对输入的变化程度。

$$\text{cond} = \frac{\| \text{问题解的变化} \|}{\| \text{输入的变化} \|}$$
$$\text{cond} = \left\| \frac{[f(\hat{x}) - f(x)] / f(x)}{[\hat{x} - x] / x} \right\|$$

$$\text{可微时} \quad \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

1.4 机器相关

$$\text{上溢界 OFL} = \beta^{U+1} (1 - \beta^{-P})$$

$$\text{下溢界 UFL} = \beta^L$$

$$x = \underbrace{\pm \left(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_{p-1}}{\beta^{p-1}} \right)}_{\text{共 } p-1 \text{ 位尾数}} \times \underbrace{\beta^E}_{\text{进制}} \rightarrow \text{指数}$$

符号

$$L \leq E \leq U, \quad 0 \leq d_i \leq \beta - 1$$

1.4 机器相关

$$\underline{\epsilon_{mach}} = \frac{1}{2} \beta^{1-p}$$

机器精度, 机器的相对误差限

3. 半精度浮点数有16个二进制位, 其中尾数长度 $p=11$, 请问将一个实数 x 用半精度浮点数表示产生的相对误差上限是多大? x 至少前几位十进制有效数字正确 (含“四舍五入”后正确)?

$$3. \quad \epsilon_{mach} = \frac{1}{2} \beta^{1-p} \quad \epsilon_{mach} < \frac{1}{2} \times 10^{-p}$$

$$\epsilon_{mach} = 2^{-p} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1024} < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

3位有效数字正确.

二、非线性方程组

2.1 问题的敏感性

$y = f(x)$ 在 $y=0$ 处的敏感性

$$\text{cond} = \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| \approx \left| \frac{1}{f'(x^*)} \right|$$

小 $\rightarrow$ 敏感

大 $\rightarrow$ 不..

2.2 二分法

Week 2

算法 2.1: 二分法

输入: a, b , 函数 $f(x)$; 输出: x .

```
While  $(b - a) > \epsilon$  do  
   $x := a + (b - a) / 2$ ;  
  If  $\text{sign}(f(x)) = \text{sign}(f(a))$  then  
     $a := x$ ;  
  Else  
     $b := x$ ;  
End  
 $x := a + (b - a) / 2$ .
```

1. 用算法2.1描述的二分法解一个非线性方程, 输入的初始有根区间为 $[1030, 1040]$ 。请问循环判停阈值 ϵ 小于多少会造成死循环? 如果不死循环, 该算法最多执行多少步迭代?

修改为 $\epsilon \rightarrow \max\{|a|, |b|\} \cdot 2\epsilon_{\text{mach}}$,
算法不会死循环

二分法迭代的极限:

端点 a_k, b_k 是两个相邻的机器浮点数

$$b_k - a_k = 2^{\lfloor \log_2 |x^*| \rfloor} \cdot 2\epsilon_{\text{mach}}$$

待补充

解, ① $2^{10} \cdot 2\epsilon_{\text{mach}} = 2^{10} \cdot 2^{-52} = 2^{-42}$

② $\left\lceil \log_2 \frac{b-a}{2^{-42}} \right\rceil = 4 + 42 = 46$

2.3 不动点迭代: $f(x)=0 \rightarrow \varphi(x)=x$

$$f(x)$$

$$f(x)=x^4-x-2=0$$

$$\varphi(x)$$

$$\varphi(x)=x^4-2=x$$

迭代方程

$$x_{k+1}=x_k^4-2$$

2.3 不动点迭代

全局收敛条件
[a,b]

$$\forall x \in [a, b], a \leq \varphi(x) \leq b \quad ①$$

$$\exists L \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$\forall x \in [a, b], |\varphi'(x)| < 1 \quad ②$$

2.3 不动点, 迭代

局部收敛

x^* 为不动点,

$\varphi'(x)$ 在 x^* 邻域上连续

且 $|\varphi'(x^*)| < 1$

2.4 收敛性

	$10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$	$-\beta \pi, C=10^{-1}$
$ e(x_k) $	$10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$	$-\beta \pi, C=10^{-2}$
	$10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}$	$-\beta \pi, C=1$

РБП收敛: $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$
 $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

2.5 牛顿迭代法

迭代方程

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

* 一般的 $\varphi(x)$ 至少局部2阶收敛

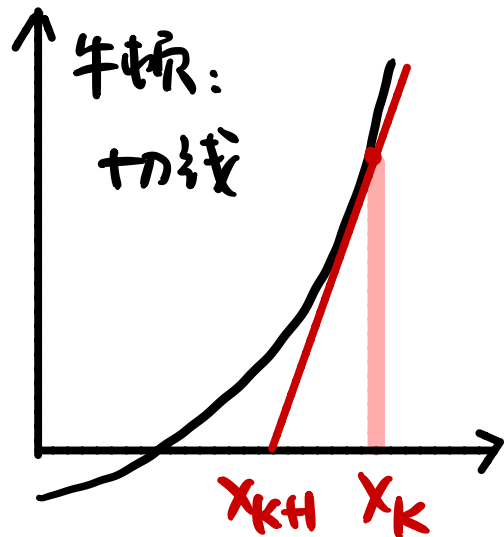
2.6 判停准则

① 残差判据 $f(x_k) \leq \varepsilon_1$

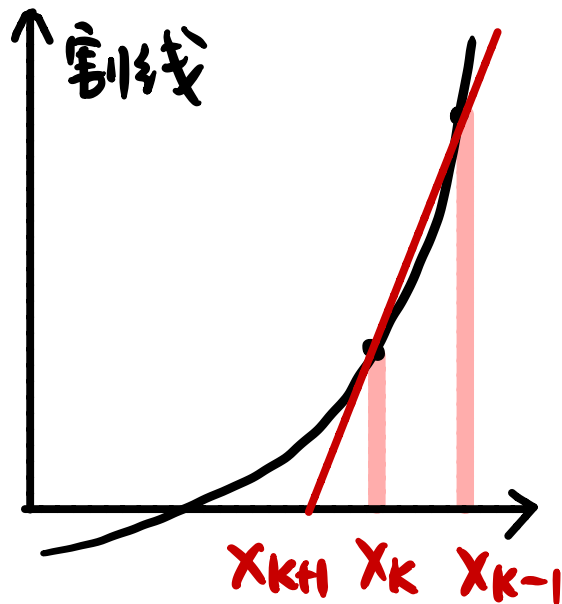
② 误差判据 $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon_2$

③ 相对误差判据 $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon_3 |x_{k+1}|$

2.7 割线法



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

2.8 阻尼牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_i \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

λ_i 从 1 开始递减, 牛顿下山法

2.9 非线性方程组 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [Jf(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})$

1. 用牛顿法解非线性方程组:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 13 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

请列出迭代计算公式, 即写出 $x^{(k+1)}$ 关于 $x^{(k)}$ 的3个分量 $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ 的表达式。

其中:

$$Jf(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2^{(k)} & 3x_3^{(k)} \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} + x_2^{(k)2} + x_3^{(k)3} + 10 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)} + 5x_3^{(k)} + 13 \\ 3x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)} + 6x_3^{(k)} + 16 \end{bmatrix}$$

三. 线性方程组的直接解法

3.1 矩阵相关概念,

奇异与非奇异

特征值与特征向量

特殊矩阵

k 阶顺序主子式

3.2 范数

向量

1-范数

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

2-范数

$$\|x\|_2 = \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

∞ -范数

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|$$

矩阵

$$\|A\|_1 = \max \sum |a_{ij}| \text{ 列}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum |a_{ij}| \text{ 行}$$

3.2 范数定义

- $\|x\| \geq 0$, 仅在 $x=0$ 时 $\|x\|=0$

- $\|A\| \geq 0$, 仅在 $A=0$ 时 $\|A\|=0$

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- 向量

- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

- 矩阵

1. 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的 Frobenius 范数的定义为：

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

试证明：

(a) $\|\mathbf{A}\|_F \geq 0$, 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 时, $\|\mathbf{A}\|_F = 0$;

(b) $\|\alpha \mathbf{A}\|_F = |\alpha| \|\mathbf{A}\|_F$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F + \|\mathbf{B}\|_F$;

(d) $\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$.

(e) $\|\mathbf{Ax}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_F$

3.3 矩阵条件数

$$\text{cond} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\text{cond}(A)_{\infty} = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$$

3.4 高斯消去法 & LU分解 & LUP分解

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 1/4 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1 & 3/2 \end{array} \right| \\
 (1,2,3) \qquad (2,1,3) \qquad (2,1,3) \qquad (2,3,1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right| \qquad L = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{array} \right| \qquad U = \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right| \qquad P = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \\
 (2,3,1)
 \end{array}$$

1.对下面的矩阵***A***做部分主元LU分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ -1 & 0.75 & -0.5 & 1 \\ -1 & 0.25 & 0.75 & 1 \\ -1 & 0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

求结果矩阵***L***, ***U***, ***P***

3.4 LU分解

存在LU分解: 各阶顺序主子式 A_i 的秩 = A 前 i 列的秩

LU分解唯一: A 各阶顺序主子式 > 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(不存在LU分解)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(存在LU分解,
但不唯一)

3.5 LDL^T 分解 / Cholesky 分解

LDL^T: $A = LU = LDU_0 = LDL^T$

↳ 对称矩阵

Cholesky: $A = LU = LDU_0 = LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^T = L_1L_1^T$

↳ 对称正定矩阵

3.6 带状矩阵 & 追赶法

...

四. 线性方程组的迭代解法

4.1 收敛性

方程 $x = Bx + f$

$$Ax = b$$

Jacobi

G-S

SOR.

① $I - B$ 为非奇异矩阵

② B 的谱半径 $\rho(B) < 1$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

4.1 谱半径 $\rho(A) = \max |\lambda_i|$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow (\lambda - 1) [(\lambda - 1)^2 + 1] = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm i$$

$$\therefore \rho(A) = \sqrt{2}$$

4.2 雅可比迭代法

$$A = D - L - U$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} & & \\ -a_{21} & & \\ -a_{31} & -a_{32} & \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & -a_{12} & -a_{13} \\ & & -a_{23} \end{vmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

4.3 高斯-塞德尔迭代法 (G-S迭代法)

$$\text{Jacobi: } x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\text{G-S : } x^{(k+1)} = D^{-1}[Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}] + D^{-1}b$$

$\Downarrow$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

4.4 Jacobi 与 G-S 迭代公式

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Jacobi :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} (3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) + \frac{14}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{-10} (2x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)}) + \frac{-5}{-10} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} (x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) + \frac{14}{10} \end{aligned}$$

G-S:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} (3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) + \frac{14}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{-10} (2x_1^{(k+1)} + 3x_3^{(k)}) + \frac{-5}{-10} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} (x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) + \frac{14}{10} \end{aligned}$$

4.5 SOR 迭代法

加权因子, $X_i^{(k+1)} = (1-\omega)X_i^{(k)} + \omega \tilde{X}_i^{(k+1)}$

$$X_1^{(k+1)} = (1-\omega)X_1^{(k)} + \omega \left[-\frac{1}{10} (3X_2^{(k)} + X_3^{(k)}) + \frac{14}{10} \right]$$

$$X_2^{(k+1)} = (1-\omega)X_2^{(k)} + \omega \left[-\frac{1}{10} (2X_1^{(k+1)} + 3X_3^{(k)}) + \frac{-5}{10} \right]$$

$$X_3^{(k+1)} = (1-\omega)X_3^{(k)} + \omega \left[-\frac{1}{10} (X_1^{(k+1)} + 3X_2^{(k+1)}) + \frac{14}{10} \right]$$

当 $\omega=1$ 时, 即为 G-S 迭代法.

4.6 三种迭代法的收敛条件

Jacobi $\leftarrow A$ 和 $2D - A$ 均正定 (D 为 A 的对角阵)

G-S $\leftarrow \|B\|_{\infty} < 1$ 或 $\|B\|_1 < 1$ (B 是 Jacobi 阵)

A 严格对角占优 / 不可约弱对角占优, 则 J 和 G-S 收敛
 $\hookrightarrow \dots$, 且 $0 < \omega \leq 1$, 则 SOR 收敛.

A 对称正定, G-S 收敛, SOR 收敛 ($0 < \omega < 2$).