

2019 年“数值分析”期中试卷

(第一大题的答案请直接写在试卷上)

尽量写准确值, 若用近似值保留小数点后两位数字!

一、选择、填空题 (9 分)

1. 下面哪个命题是正确的: C

(A) 高精度运算可以改善问题的病态性.

(B) 无论问题是否病态, 只要算法稳定都能得到好的近似解.

(C) 对某个数值计算问题, 其结果准确度主要受初始数据误差、截断误差、舍入误差的影响.

(D) 条件数是反映问题病态性的量, 其值越小说明问题越病态.

2. 对于非奇异实方阵 A , 下面哪个矩阵的条件数不一定与 A 相同? B(A) cA , c 为任意非零实数;(B) DA , D 为任意非奇异对角阵;(C) PA , P 为任意排列阵;(D) A^{-1} .

3. 稀疏矩阵 $A \in \mathbb{R}^{10000 \times 10000}$, 其中含 50000 个非零元素, 矩阵元素用 IEEE 双精度浮点数表示. 请问: 若使用压缩稀疏行格式存储该矩阵, 需要 640000 个字节的存储空间; 若使用三元组格式, 需要 800000 个字节的存储空间. 或 640004

4. “分裂法”是构造一阶定常迭代法解线性方程组 $Ax = b$ 的常用方法, 请写出对应的迭代计算公式(若引入新的符号, 应解释) $x^{(k+1)} = M^{-1}N x^{(k)} + M^{-1}b$, 其中 M, N 满足 $A = M - N$;
该迭代格式收敛的充分必要条件是 谱半径 $\rho(M^{-1}N) < 1$.

5. 半精度浮点数含 16 个二进制位, 其中尾数长度 $p=11$, 请问将一个实数 x 用半精度浮点数表示产生的相对误差上限是 2^{-11} .

x 至少前 3 位十进制有效数字正确 (考虑“四舍五入”).

若指数 E 的取值范围是 $[-14, 15]$, 则 realmin 值是 2^{-14} .
UFL

二. 在没有浮点数除法的计算机上可以用乘以除数的倒数来代替除法, 具体思路是采用一个迭代算法来计算 $x = 1/a$, 其中 a 为已知正数. 1) 如何构造一个非线性方程然后用牛顿法来计算上述 x , 且计算中不使用除法? 写出迭代求解计算公式. 2) 设 $a=2$, 迭代初始值 $x_0=0.6$,

将上述算法执行两步, 看看计算结果是什么. (6 分)

1) 方程等价于 $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$, 用牛顿法, 迭代公式为 $x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - a}{-\frac{1}{x_k^2}} = 2x_k - ax_k^2$

2) $x_1 = 0.48$, $x_2 = 0.4992 \approx 0.50$

三. 用牛顿法解非线性方程组 (共 7 分)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 13 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1) 列出牛顿法迭代计算公式, 即写出 $x^{(k+1)}$ 关于 $x^{(k)}$ 的 3 个分量 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ 的表达式.

2) 假设迭代初值 $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, 执行一步迭代计算求 $x^{(1)}$, 其中要求用部分主元 LU 分解并写出分解的结果.

解: 1) $J_f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 3x_3^2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f(x^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 10 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)} + 5x_3^{(k)} + 13 \\ 3x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)} + 6x_3^{(k)} + 16 \end{bmatrix}$

2). 取 $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ 替换上式中 $x^{(k)}$, $J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$
 $U = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

四. 请计算A的 Cholesky 分解。(4 分)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

五. 在 IEEE 浮点数系统中按公式 $F = a^2 - b^2$ 来计算 F 的值, 其中输入值 a, b 均为正数且 $a > b$, 问: F 的准确值至少要比 a^2 大多少倍才能使得按上述公式计算出的 F 相对误差一定不超过 δ ? (比如 $\delta = 0.01$) (4 分)

(换句话说, 设 $F = k \cdot a^2$, 那么 k 至少要多大才能使 F 计算结果的相对误差一定不超过 δ ?)

(提示: 答案是 k 要满足的一个包含 δ 但不含 a, b, F 的不等式, 由它可以推出 $\varepsilon_r(F) \leq \delta$)

解: 考虑数据传递误差.

首先输入数据 a, b 有误差.

$\varepsilon_r(\hat{a}) = \varepsilon_r(\hat{b}) = \varepsilon_{mach}$, 相对误差限为机器精度.

$$\varepsilon(\hat{a}^2) = a^2 \cdot 2\varepsilon_{mach}, \quad \varepsilon(\hat{b}^2) = b^2 \cdot 2\varepsilon_{mach}.$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\hat{F}) = 2(a^2 + b^2) \varepsilon_{mach} \leq (4a^2 - 2F) \varepsilon_{mach}.$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r(\hat{F}) \leq \left(\frac{4a^2}{F} - 2 \right) \varepsilon_{mach}$$

$$\text{要保证 } \varepsilon_r(\hat{F}) \leq \delta, \text{ 只要 } \left(\frac{4a^2}{F} - 2 \right) \varepsilon_{mach} \leq \delta$$

$$\Rightarrow k = \frac{F}{a^2} \geq \frac{4\varepsilon_{mach}}{2\varepsilon_{mach} + \delta} \approx \frac{4\varepsilon_{mach}}{\delta}.$$

若考虑算 a^2, b^2 时中间舍入误差, 则可推出

$$k \geq \frac{6\varepsilon_{mach}}{2\varepsilon_{mach} + \delta}.$$