

直线: $Ax + By + C = 0$

$$\text{令 } z = x + yi \quad \bar{z} = x - yi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$\text{化为 } A\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + C = 0$$

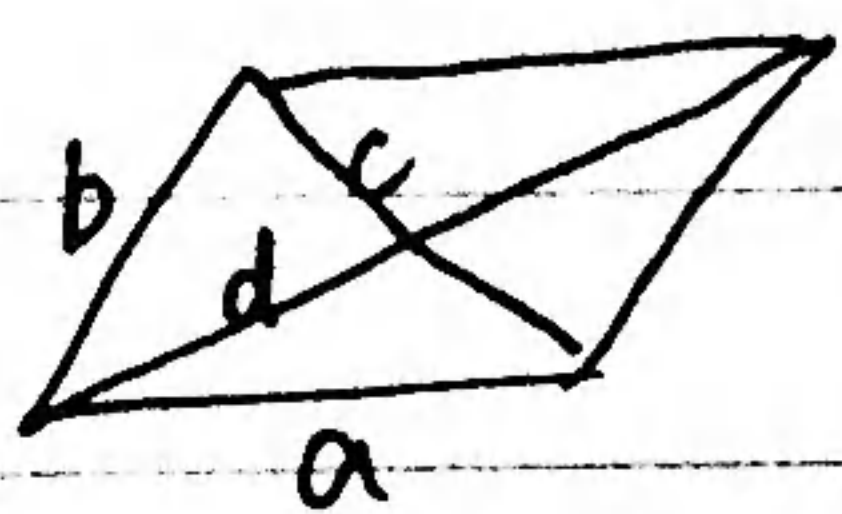
$$\Rightarrow \frac{A - Bi}{2} z + \frac{A + Bi}{2i} \bar{z} + C = 0$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{A + Bi}{2i} = \alpha \\ \beta = C \end{cases} \quad \text{则化为 } \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$$

图: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

利用 $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$ 故可化为

$$z\bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$$



求证: $(a^2 + b^2) \times 2 = c^2 + d^2$

(平行四边形)

令 $a = \vec{j}_1$ $b = \vec{j}_2$ (向量) 则 $d = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ $c = \vec{j}_1 - \vec{j}_2$

即求证 $d^2 + c^2 = |\vec{j}_1 + \vec{j}_2|^2 + |\vec{j}_1 - \vec{j}_2|^2 = 2(|\vec{j}_1|^2 + |\vec{j}_2|^2)$

$$|\vec{j}_1 + \vec{j}_2|^2 = (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)(\bar{\vec{j}}_1 + \bar{\vec{j}}_2) = \vec{j}_1 \bar{\vec{j}}_1 + \vec{j}_2 \bar{\vec{j}}_2 + \underbrace{\vec{j}_1 \bar{\vec{j}}_2 + \vec{j}_2 \bar{\vec{j}}_1}_{\text{共轭项}}$$

$$\Rightarrow |\vec{j}_1 - \vec{j}_2|^2 = \vec{j}_1 \bar{\vec{j}}_1 + \vec{j}_2 \bar{\vec{j}}_2 - \vec{j}_1 \bar{\vec{j}}_2 - \vec{j}_2 \bar{\vec{j}}_1$$

$$\therefore \text{左例} = 2(\vec{j}_1 \bar{\vec{j}}_1 + \vec{j}_2 \bar{\vec{j}}_2) = 2(|\vec{j}_1|^2 + |\vec{j}_2|^2) = 2(a^2 + b^2)$$

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1$$

表达式唯一, $\bar{z} = x - yi$ (主要用于加减法)

当 $z \neq 0$ 时 (即 $x^2 + y^2 > 0$ 时) 可引入极坐标.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \in [0, 2\pi) \text{ 或 } [0, 2\pi]$$

认为 $z=0$ 时复角可以任意取 (非唯一的故无须直接用坐标表示)

$$z = \infty \Leftrightarrow r = +\infty \quad (\text{复数上不区分正、负无穷, 无穷只有一个})$$

$\hookrightarrow$ x, y 中只要有一个趋于无穷, z 就无穷, 这种表示也是不唯一的

紧致集合.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

例: 求 $\max |z^n + \alpha|$ ($|z| \leq 1$) $r > 0$ 固定 $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\alpha \in \mathbb{C}$
(自然数我们认为不包括0)

$$\text{解: } |z^n + \alpha| \leq |z^n| + |\alpha| \quad \therefore \max = 1^n + |\alpha|$$

Date 2

设 $z \neq 0$, 则可写成极坐标形式 $z = re^{i\theta}$ $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$

用 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ($\neq 0$) 去乘一个复数 $z (\neq 0)$ 则有 $z_0 z = r_0 r e^{i(\theta_0 + \theta)}$

这时 $r \rightarrow r_0 r$ $\theta \rightarrow \theta_0 + \theta$

特别地当 $r_0 = 1$ 时 $z_0 = e^{i\theta_0}$ $z_0 z = e^{i\theta_0} \cdot r e^{i\theta} = r e^{i(\theta_0 + \theta)}$

此时几何意义: $z_0 z$ 相当于将 z 逆时针旋转 θ_0 角.

平移: $z' = z + \alpha$ 其中 $\alpha = (a, b) = a + ib$

$$\text{则 } x' = x + a \quad y' = y + b \quad (z = x + iy)$$

旋转 $z' = z e^{i\theta}$ 逆时针转 θ 角.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

当 $z_0 = i$ 时 $z \cdot z_0 = z \cdot i$ 相当于把 z 逆时针旋转 90° .

当 $z_0 = -i$ 时 $z \cdot z_0 = z \cdot (-i)$ 相当于把 z 顺时针旋转 90° .

$$(i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \quad -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

有理分式.

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_n \neq 0 \quad a_k \in \mathbb{C})$$

$$Q_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k \quad b_m \neq 0$$

超越数: 不能作为整系数方程的根. (如 π, e) (无理数几乎都是超越数)

非超越数: 能作为 ---

(如 $1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, \dots$)

开集 连通集.

D 是 $\mathbb{C}$ 上的一个子集 Domain

内点 $z_0 \in D \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ s.t. $|z - z_0| < \delta \subset D$

开集: 由内点构成的集合

区域: 开集 + 连通.

初等函数与解析函数.

定义: 若 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在且有限 (复数)

则称 $f(z)$ 在 z_0 可导并记 极限为 $f'(z_0) = a + ib$

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \in C' \quad u, v \in \mathbb{R}$

结论: $f(z)$ 在 (x, y) 处可导的充要条件是 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (C-R 条件)

$$df = du + i dv = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

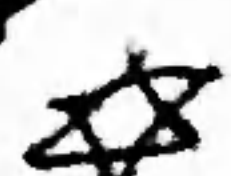
$$df = f'(z_0) \cdot dz = (a + ib)(dx + i dy) = a dx - b dy + i(b dx + a dy)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a dx - b dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ b dx + a dy = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} dy = 0 \Rightarrow a dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \Rightarrow (a - \frac{\partial u}{\partial x}) dx = 0 \Rightarrow a = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$b dx = \frac{\partial v}{\partial x} dx \Rightarrow b = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$



Date 3.

再令 $dx=0 \Rightarrow a = \frac{\partial v}{\partial y} \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y}$

又: $a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad b = \frac{\partial v}{\partial x} \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

即 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 是 $f(z)$ 在 (x,y) 处可导的必要条件.

若 $u, v \in C^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

等式两边相加得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$

$\Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

同理有 $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace 算子.

若 $f(z) = u + iv$ 在给定区域上处处可导. 则称 $f(z)$ 是全纯函数 (entire)

或解析函数 (analytic)

$\Rightarrow f(z)$ 在 z_0 的任何阶导数存在, 且有 $f^{(n)}(z_0) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^n} \quad n=0, 1, 2, \dots$

定义: $f(z)$ 在 z_0 处解析 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ s.t. $f(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 内处处可导 $\Leftrightarrow$ 处处满足 C-R 条件.

若 $f(z)$ 处处可导则处处解析. (区域)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha - \alpha_0)^n}{n!}$ 成立的重要条件是 $f(z)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处解析.

而并非 $f(z) \in C^\infty$!!

举例说明:

$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

~~可得 $f(x) = 0$ for~~

~~$f(x) = f(x) = f(x) = \dots$ 均连续~~

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{故 } f \in C$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{\text{令 } y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = (e^{-\frac{1}{x^2}})' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{令 } y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 \quad \text{故 } f \in C^{(1)}$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \left(\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}} - 6x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} = 0 \quad \text{故 } f \in C^{(2)}$$

以此类推. 可得 $f \in C^\infty$ 在任意点均连续可导.

而显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开时. 若按 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$ 去展.

结果中皆为 0 (因 $f^{(n)}(0)=0$) 但是 f 在 $x \neq 0$ 处并非为 0. 故不能如此展开.

初等函数.

$$\text{由 } e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ 可得 } e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{n!}$$

$$\text{再由 Euler 公式. } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\text{将 } z \text{ 代入得 } \begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

例 求 $\cos(x+iy)$ $\sin(x+iy)$ 的实虚部. 并证明存在给

复数 $a+bi$. 等式 $\cos z = a+bi$ ($\sin z = a+bi$) 有无穷多解 $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$

$$\text{由 } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2}$$

$$= \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \sin x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\cos x + i y) = \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)$$

$$\operatorname{Im}(\cos x + i y) = \sin x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$$

任给 $a, b \in \mathbb{R}$. 令 $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x = a$ $\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = b$

若 $b=0$ 时. 若 $|a| \leq 1$ 可解出其解为 $y=0$ $x = \arccos a$. 即 x 有无穷多解.

若 $|a| > 1$ $h(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = |a| > 1$ $h(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} > 0$

$\frac{e^y - e^{-y}}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$h(0) = 1$ $h(+\infty) = +\infty$ $\therefore \exists$ 唯一解 y 使上式成立.

~~$(x = \frac{\pi}{2} - y = y = 0)$~~ ~~此时 $\cos x = 1$~~

则 $a > 0$ 时让 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $a < 0$ 时让 $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 不论怎样均有无穷多解.

若 $b \neq 0$ 时. $\cos x = \frac{2a}{e^y + e^{-y}}$ $\sin x = \frac{2b}{e^y - e^{-y}}$

利用 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\Rightarrow \frac{4a^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4b^2}{(e^y - e^{-y})^2} = 1$$

当 $b \neq 0$ 时 $\exists y$ 使上式成立.

因 $y \rightarrow 0$ 时. 左边 $\rightarrow +\infty$.

$y \rightarrow +\infty$ 时. 左边 $\rightarrow 0$.

又. 函数连续. $\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 内必 $\exists y$ 使. 左边 $= 1$. $(-\infty, 0)$ 内也 $\exists y$. 因偶函数.

代入 $\cos x = \frac{2a}{e^y + e^{-y}}$ 可解出 x . 且易得 x 有无穷多解.

复数域下的对数.

$$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$$

$|a|$ 表示 a 的模. $\arg a$ 为 a 的幅角主值 $(0, 2\pi)$

$$\operatorname{Ln} a = \ln |a| + i \arg a + 2k\pi i$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

$$= \ln a + 2k\pi i$$

$k=0$ 时取值为主值, 即 $\ln a$.

例: $\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ $\therefore \operatorname{Ln}(-1) = \ln(-1) + 2k\pi i$

$$= \pm \pi i + 2k\pi i$$

$i \arg(-1)$ 可取 $\begin{cases} \pi i \\ -\pi i \end{cases}$

$$\Delta \quad \ln(3+4i) = \ln|3+4i| + i \arg(3+4i) = \ln 5 + i \arg(3+4i)$$

$$\Delta \quad 1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} \Rightarrow \text{而 } \ln 1 = \ln 1 + i 2k\pi = 2k\pi i$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{2\sqrt{2}k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta \quad i^j = e^{j \ln i} = e^{j(\ln i + 2k\pi i)} = e^{j(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i)} = e^{-(\frac{1}{2} + 2k)\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Delta \quad \text{若 } z_k = z_j \quad \text{则} \quad \begin{cases} \cos 2\sqrt{2}k\pi = \cos 2\sqrt{2}j\pi \\ \sin 2\sqrt{2}k\pi = \sin 2\sqrt{2}j\pi \end{cases}$$

(续上题)

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}k\pi = 2\sqrt{2}j\pi \pm 2n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2}(k-j) = \pm n$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}|k-j| = n \quad \text{显然左边} \in \text{无理数}$$

右边 \in 有理数

故无解 \therefore 不存在 $k \neq j$ 使 $z_k = z_j$

即 $1^{\sqrt{2}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 有无穷多个复数表示方法

且对于不同 k 值, 其复数不同. (稠密集合)

$$\Delta \quad 1^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \ln 1} = e^{\frac{p}{q}(2k\pi i)} = e^{\frac{2kp\pi}{q}i} \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$= \cos \frac{2kp\pi}{q} + i \sin \frac{2kp\pi}{q} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

此种表示方法并不是无穷多个

最多有 $k=0, 1, 2, \dots, q-1$ 这样 q 个值

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_n \neq 0)$$

$$= a_n \sum_{m=1}^n (z - z_m) \quad z_m \text{ 为 } P_n(z) \text{ 的零点}$$

$$\sin z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Date 5

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \cos z = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$$

$$= z \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{n\pi \pm z}{n\pi} \right) \right\}_{\neq 0}$$

$$= z \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 \pm \frac{z}{n\pi}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m}} =$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

全纯函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + C_n) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \quad \text{有限的复数收敛}$$

$$z) \sum C_n \text{ 收敛}$$

全纯函数. Liouville 定理: 有界的全纯函数是常数.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad e^z \text{ 周期为 } 2\pi i.$$

一个复系数方程永远有 n 个解.

Ch3 复积分.

设 $C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$

分段光滑曲线. 即 $z'(t) = 0$ 的点仅有限个或测度为0.

注: $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$

$z'(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t) = y'(t) = 0$ 奇点.

0 向量, 定义为不存在切向量.

定义复积分:
$$I = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^N f(z_k) \Delta z_k \quad (f \text{ 连续})$$

$$I = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (z = z(t)) \text{ 但很少会用到.}$$

闭曲线积分.

$$\oint_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (\text{其值为0. 如果有奇点的话})$$

Cauchy-Goursat 积分定理 (C-G 定理)

$f(z)$ 在 D 内处处可导. C 是 D 内任一简单闭曲线, 则有 $\oint_C f(z) dz = 0$

(任何任一闭曲线, 均可由有限个简单闭曲线的并得到, 故只讨论简单闭曲线).

D 是单连通的区域

Green 公式.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

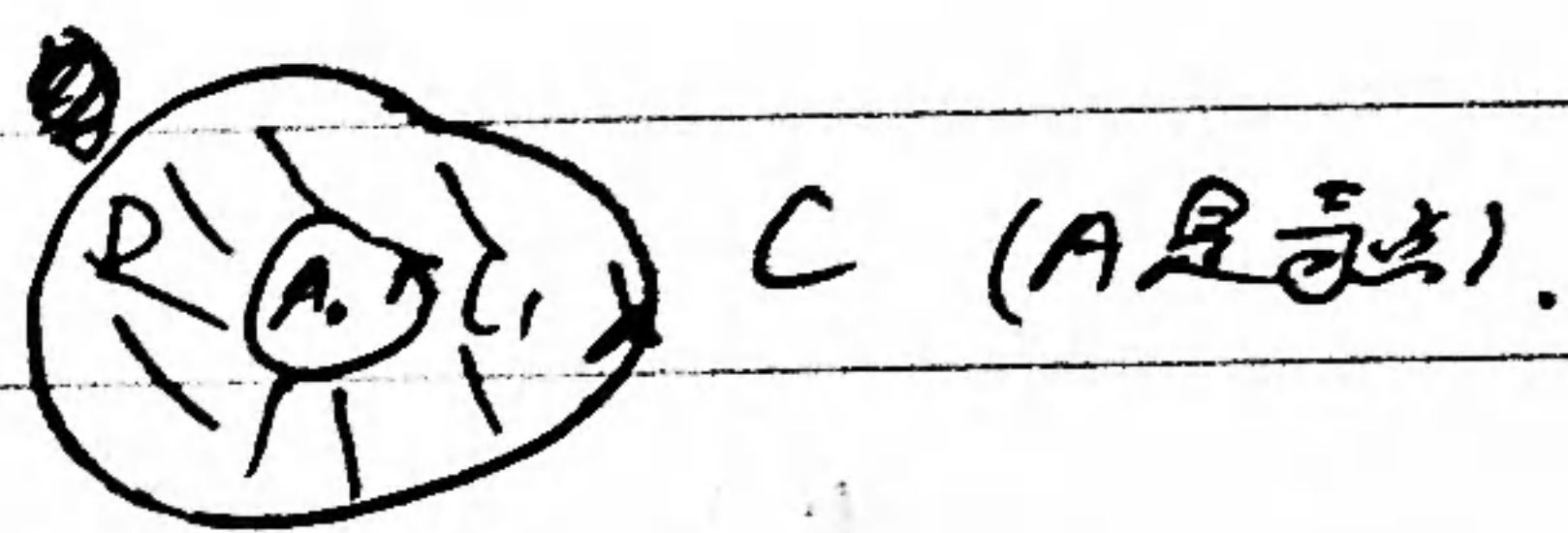
$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy) = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

$$\text{由 Green 公式} = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Date 6

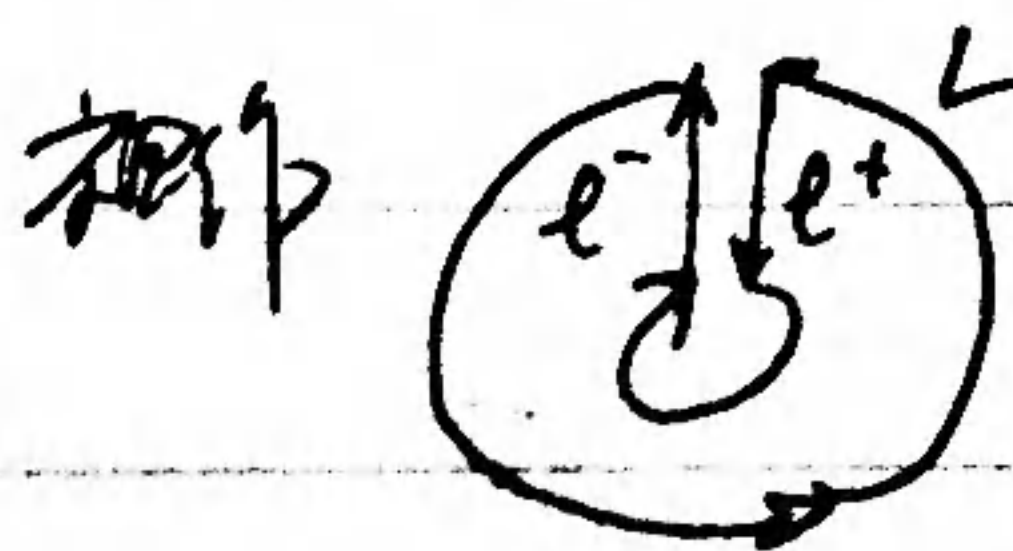
根据 C-R 式 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
 故上式 = $\iint_D 0 \, dx \, dy + i \iint_D 0 \, dx \, dy = 0$

$f(z)$ 在 D 内外均可导. D 由 C_1 和 C 围成的区域



$\Rightarrow \oint_C f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz$

~~$\oint_C f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz$~~



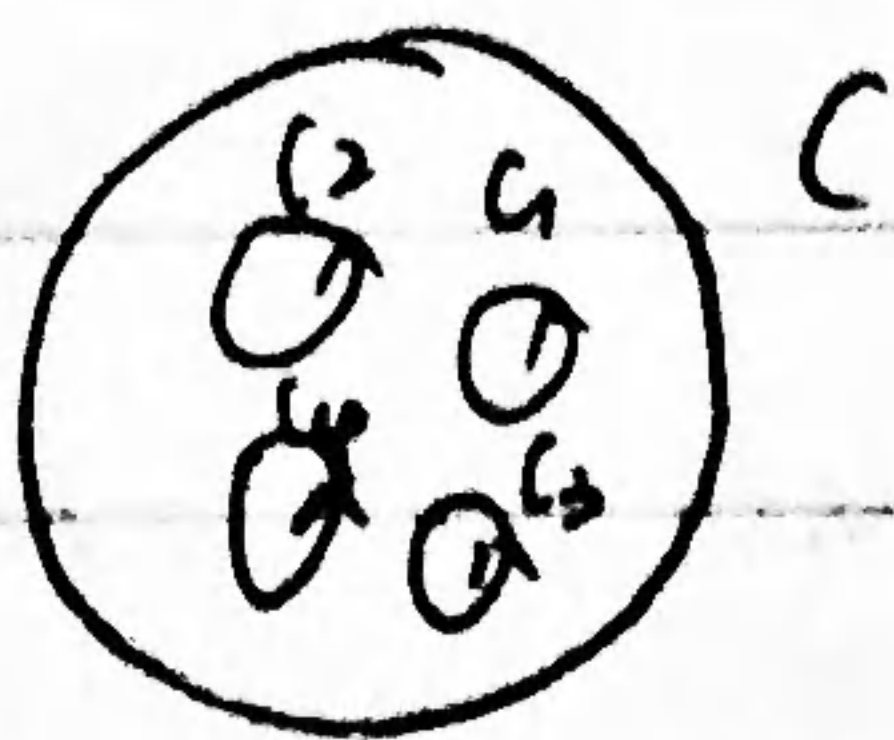
这样在该割开曲线内每点处处可导.

$\Rightarrow \oint_L f(z) \, dz = 0$ 即 $\oint_C + \oint_{e^+} + \oint_{C_1^-} + \oint_{e^-} = \oint_L = 0$

而 $\oint_{e^+} + \oint_{e^-} = 0$ (同一直线相反方向的积分).

故 $\oint_C + \oint_{C_1^-} = 0$ 而 $\oint_{C_1^-} = -\oint_{C_1} \Rightarrow \oint_C = \oint_{C_1}$

推广:



C_1, C_2, C_3, C_4 内均无奇点.

D 与 C 之间的地处处可导.

则 $\oint_C f(z) \, dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) \, dz$

复合闭路定理.

例. 求 $I_n = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} \, dz$ $n \in \mathbb{Z}$ 其中 C 点包含 z_0 的任一简单闭曲线.



取一个 C_ϵ 曲线. $C_\epsilon: |z-z_0| = \epsilon \Leftrightarrow z = z_0 + \epsilon e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

则 $\oint_{C_\epsilon} \frac{1}{(z-z_0)^n} \, dz = I_n$

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^n e^{i\theta n}} z i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{z^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi i}{z^{n-1}} = 2\pi i & (n=1 \text{ 时}) \\ 0 & (n \neq 1 \text{ 时}) \end{cases}\end{aligned}$$

(如/我们只讨论C内有奇点情况, 不考虑C上有奇点的情况. 类似)

① $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$... 高阶导数公式.

例: $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx \quad (n \in \mathbb{N})$

$$= \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$$

证明高阶导数公式:

$$f(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析} \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

$\Leftrightarrow f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导 (即处处满足C-R条件)

将 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ 两边同时乘以 $(z-z_0)^{n+1}$ 得

$$\cancel{\frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}} = \oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_C \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \oint_C (z-z_0)^{k-n-1}$$

令 $I_n = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}$ 易知 $I_n = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$ 故原式 = $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} I_{n+1-k}$

$k=n$ 时 $I_{n+1-k} = 2\pi i$ 故原式 = $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot 2\pi i \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

$k \neq n$ 时 $I_{n+1-k} = 0$ (取 $k < n-1$)

Lionville 定理: 有界的整函数是常数. ★ 考试重点!!

$$\text{证明: } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^{n+1}}$$

$$f \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M > 0 \text{ s.t. } |f(z)| \leq M$$

$$C: z = re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad dz = re^{i\theta} \cdot i d\theta$$

$$|dz| = r d\theta > 0.$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M \cdot r d\theta}{r^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi}{r^n} = \frac{n! M}{r^n}$$

对固定的 n 而言, 分子不变, 分母 $= r^n$ 在随 r 变. $r \rightarrow +\infty$ 时 $|f^{(n)}(0)| \rightarrow 0$.

又 $\because |f^{(n)}(0)| \geq 0$ 一个非负常数可以小于 $\forall$ 给定正数 $\therefore |f^{(n)}(0)| = 0$

(类似求导定理).

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!} = f(0) + 0 + 0 + 0 + \dots = f(0)$$

△ 若 D 是复平面上的一个区域 f 在 D 解析 $\tilde{D} = f(D)$ 点 D 的像.

则 $\tilde{D}$ 或者是 0 维的 (即 1 个点), 或是 2 维的开集. (而不能是 1 维曲线)

证明 $\Delta x \Delta y = \text{面积元}$

$$\square_{\Delta x \Delta y} \longrightarrow \square_{\Delta u \Delta v}$$

$$\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \underset{\text{Jacobi}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$\text{又} \because f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{故} \quad |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \text{Jacobi} \geq 0$$

$$\text{若 } \text{Jacobi} \equiv 0 \quad \text{即} \quad \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y} \equiv 0 \Rightarrow |f'(z)| \equiv 0 \Rightarrow f'(z) \equiv 0$$

故 $f(z)$ 是常数, 即 $\tilde{D}$ 为一个点. 是 0 维的.

若 $\text{Jacobi} \neq 0$ 则 $\exists$ 一个邻域 δ 使 $|f'(z)| > 0$.

$$\Rightarrow \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y} > 0$$

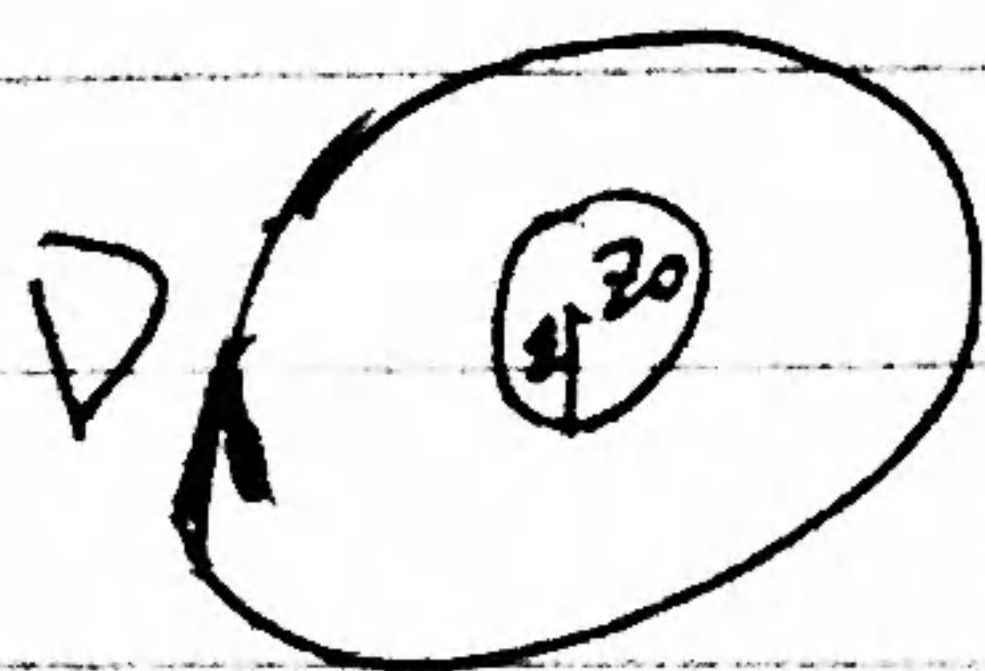
即 $\tilde{D}$ 为 2 维的.

(之所以为开集, 是因解析要求各点邻域内处处可导. 若为闭集, 边界处都无邻域, 何谈可导?)

△ 最大模原理. f 在 D 解析. 则 $|f(z)|$ 在 D 上取到最大值. (除非 f 为常数)

证明. 假设 $|f(z)|$ 不是在 D 上取到的最大值 (反证法)

$$\text{即 } z_0 \in D \quad |f(z_0)| = \max_{z \in D \cup \partial D} |f(z)| \quad (D \text{ 是个区域, 是开集})$$



$\because z_0$ 是 D 内点 $\therefore \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall z$ 满足 $|z - z_0| \leq \varepsilon_0$ 有 $z \in D$.

$$\text{用公式 } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ 均可})$$

设 $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \zeta e^{i\theta}) d\theta$

故 $|f(z)| = \max |f(z)|$ 故 $|f(z + \zeta e^{i\theta})| \leq |f(z)|$

故 $\int_0^{2\pi} |f(z + \zeta e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta = |f(z)|$

由于不等式最左、最右均为 $|f(z)|$ ，故上式不等号均恒取等号 (对 $\forall \theta$ 条件成立)

$\Rightarrow |f(z + \zeta e^{i\theta})| = |f(z)| \Rightarrow f(z) = f(z + \zeta e^{i\theta}) \quad (0 < \zeta < \delta)$

(解析函数在一段内为常数，则 f 恒为常数)

$\Rightarrow f$ 为常数，与最初假设不符，假设不成立。 $\therefore |f(z)|$ 在 D 上取最大值

$\Delta f, g$ 解析, $fg \equiv 0$ 则至少有 1 个恒为 0.

证明: 若 $f \equiv 0$. $\checkmark$

若 $f \neq 0$ 则 $\exists z_0$ s.t. $f(z_0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists \delta$ s.t. $|z - z_0| < \delta$ 时 $f(z) \neq 0$.

$\Rightarrow g(z) \equiv 0$ ~~在~~ $\{z \mid |z - z_0| < \delta\}$

由于 $g(z)$ 在一段内恒为 0，故 $g(z) \equiv 0$ (在全部定义域内)

★ 解析: 若 u 为常数，则 f 为常数. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
 若 v 为常数，则 f 为常数 (若 v 为常数 $\Rightarrow f$ 为常数)

因 $f = u + iv \Rightarrow -v = u - iu$ 满足 (1) $\Rightarrow -v$ 为常数 故 f 为常数

(2) 若 $|f|$ 为常数，则 f 为常数. (圆环上若 $|f|$ 为常数，则 f 恒为圆环一部分，不能

是全部，因函数要保证一个 x 仅对应一个 y ，故圆环一部分非封闭，是维的不确定

因此仅是圆上一点才可，即 f 为常数

(4) 若 u 为常数，则 f 为常数. 同理，一条直线为 1 维，不解析.

例: 求 $\oint \frac{\cos 2z-1}{z^m} dz = I_m \quad (m \in \mathbb{Z})$.

$\Gamma: |z|=r>0$

① 当 $m \leq 0$ 时 $\frac{1}{z^m} = z^m$ 是多项式.

$(\cos 2z-1) \cdot z^m$ 处处可导. 故 $\oint \frac{\cos 2z-1}{z^m} dz = 0$.

② 当 $m \geq 1$ 时. $\frac{1}{z^m} = z^{-(m-1)}$. ($n \geq 0$)

$\oint \frac{\cos 2z-1}{z^m} dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \cdot (\cos 2z-1)^{(m-1)} \Big|_{z=0} = \dots$

② 问方知 $\cos 2z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2z)^{2n}}{(2n)!}$

★ 去年真题!!

$\frac{\cos 2z-1}{z^m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot z^{2n-m}}{(2n)!}$

用 Taylor 展开
以见 $f(z)$ 的导数.

($n=0$ 时与 1 抵消掉)

$\Rightarrow I_m = \oint_{\Gamma} \frac{\cos 2z-1}{z^m} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \oint_{\Gamma} z^{2n-m} dz$

$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^k} = I_k = \begin{cases} 2\pi i, & k=1 \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$

则 $I_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} I_{m-2n}$

$\Rightarrow m=2n+1$ 时 $I_{m-2n} \neq 0$.

$\Rightarrow n = \frac{m-1}{2}$ ($m \geq 3$ 的奇数)

$\therefore I_m = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}}{(m-1)!} \cdot 2\pi i & (m \geq 3 \text{ 奇数}) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

Date 9

证明解析函数为常数的几种方法.

1. 导数(微分). 恒等定理

1.1 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且在 D 内 $f'(z) = 0$ 恒成立.

$$\text{证: } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \therefore u = C_1 (\text{常数}), v = C_2 (\text{常数}) \therefore f = C_1 + iC_2 (\text{常数})$$

1.2 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且在某点 $z_0 \in D$ 有 $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

证: $f(z)$ 在 D 内解析, 且 $z_0 \in D \therefore f(z)$ 在 z_0 的某邻域 $K: |z - z_0| < \rho \quad (K \subset D)$ 内可 Taylor 展开.

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

$$\text{而 } f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \therefore f(z) = f(z_0) = C (\text{常数}) \quad z \in K$$

$\therefore K$ 是 D 的子域. 根据区域 D 内解析的函数 $f(z)$ 在 D 内某子域相等, 则在 D 内恒等.

$$\therefore f(z) \equiv C (\text{常数})$$

↓ 可得

Δ $f(z)$ 在区域 D 解析, 且在 D 的某子域内为常数, 则 $f(z)$ 在 D 内为常数.

证明: 若 $f(z)$ 在 $a \in D$ 处解析, 且 $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0$ 则 a 为 $f(z)$ 的 m 级零点.

a 是不恒为 0 的函数 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Leftrightarrow f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 a 邻域内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$.

而 $\varphi(z)$ 在 a 处连续, 故 $\exists \delta > 0$ 使得 $|z - a| < \delta$ 时 $\varphi(z) \neq 0$. 故 $|z - a| < \delta$ 时 $f(z) \neq 0$.

$\therefore$ 不恒为 0 的解析函数的零点都是孤立的. (引理证毕)

令 $f_1(z) = f(z) - f(z)$ 则在 D 内某子域 K 内 $f_1(z) \equiv 0 \Rightarrow$ 在 D 上 $f_1(z) \equiv 0$ (因零点并未孤立)

$$\therefore \text{在 } D \text{ 上有 } f_1(z) \equiv f(z)$$

2. 运用定理判断解析函数 $f(z)$ 为常数.

2.1 刘维尔定理: 有界整函数 $f(z)$ 必为常数.

整函数: 指在整个复平面上处处解析的函数.

设 $|f(z)|$ 上界为 M , 即 $|f(z)| \leq M \quad (M > 0)$

为证 $f(z) = \text{常数}$, 只需证 $f'(z) = 0$

$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall \rho \in (0, +\infty) \quad f(z)$ 在 $\{z: |z - z_0| \leq \rho\}$ 上解析.

于是用柯西不等式得 $0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{M}{\rho}$ 令 $\rho \rightarrow +\infty$ 夹逼得 $|f'(z_0)| = 0 \therefore f'(z_0) = 0$

而 z_0 是任意的, $\therefore f'(z) = 0 \therefore f(z) = \text{常数}$.

△下面证明柯西不等式:

定理表述: $f(z)$ 在 $C: |z-z_0|=p$ ($0 < p < +\infty$) 为边界闭圆盘上解析

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M(p)}{p^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{其中 } M(p) = \max_{|z-z_0|=p} |f(z)| \quad (0 < p \leq p_0)$$

$$\text{定理证明: } |f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(p)}{p^{n+1}} \cdot 2\pi p = n! \frac{M(p)}{p^n}$$

3. 连续、微分、积分范围内.

3.1 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析, 且在 D 内也解析.

$$\text{证: } f(z) \text{ 在 } D \text{ 内解析} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\overline{f(z)} \text{ 在 } D \text{ 内解析} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow v \text{ 为常数} \therefore f \text{ 为常数.}$$

~~3.2~~

3.2 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析, 且 u 为常数或 v 为常数 (由 C-R 定理易证)

3.3 $f(z)$ 在 D 内解析, 且 $|f(z)|$ 在 D 内为常数, $|f(z)| \neq 0$. (见 P 页)

3.4 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析, 且 $au+bv=c$ (a, b 不全为 0 的实常数) (同 3.5)

3.5 $f(z)$ 在 D 内解析, M, m $f(z)$ 在 D 内为常数. (见 P 页)

3.6 $f(z)$ 为整函数, 且 $\exists M$ 使 $\operatorname{Re} f(z) < M$ ($M \in \mathbb{R}, M > 0$)

$$\text{证: 令 } F(z) = e^{f(z)} \quad |F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} < e^M$$

$F(z)$ 为整函数, 且有界 $\therefore F(z) = \text{常数} \therefore f(z) = \text{常数}$.

$\exists M > 0$ 使

3.7 $f(z)$ 为整函数, 且 $\forall |f(z)| > M$ 恒成立 ~~(见 P 页)~~

$$\text{证: 令 } F(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \because |f(z)| > M > 0 \quad \therefore |F(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{M} \Rightarrow F(z) = \text{常数} \therefore f(z) = \text{常数}.$$

$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ (f 在 D 处处可积).
 $F(z)$ 叫作 $f(z)$ 的原函数.

(可以有不同 $z_0 \rightarrow z$ 的路径. 但是各路径积分值相等, 前提是
 这 2 条路径内包围的区域解析)

命题: $P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_k z^k$. $C_k \in \mathbb{C}$ $C_n \neq 0$. $n \geq 1$

则 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个零点.

引理: $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$

证明: $P_n(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_1 z + C_0$ 当 $z \neq 0$ 时有
 $= z^n \left(C_n + \frac{C_{n-1}}{z} + \dots + \frac{C_1}{z^{n-1}} + \frac{C_0}{z^n} \right)$
 $= z^n \varphi(z)$

$z \rightarrow \infty$ 时 $\varphi(z) \rightarrow C_n \neq 0$.

$\Rightarrow \exists R_0 > 0$ 当 $|z| > R_0$ 时.

$|\varphi(z)| \geq |C_n| - \frac{|C_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|C_1|}{|z|^{n-1}} \geq \frac{1}{2}|C_n| > 0$

$\Rightarrow |P_n(z)| \geq |z|^n \frac{1}{2}|C_n| \rightarrow +\infty$.

下面证命题.

作 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)} \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$ 时).

设命题不对, 则 $\forall z$ $P_n(z) \neq 0$.

$f'(z) = \frac{-P_n'(z)}{P_n^2(z)}$ 按假设 ($P_n(z) \neq 0$) 处处解析.

且 $f(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$ 时)

$\exists R > 0$ 当 $|z| > R$ 时 $|f(z)| \leq 1$
当 $|z| \leq R$ 时 $f(z)$ 解析 $\Rightarrow$ 有界 ($|z| \leq R$) 时
 $\Rightarrow \exists M > 0$ 当 $|z| \leq R$ 时 $|f(z)| \leq M$.

则恒有 $|f(z)| \leq M+1 \Rightarrow f(z)$ 有界.

由 Liouville 定理. 有界的^整函数是常数.

$\Rightarrow f(z) = \text{常数 } C = \frac{1}{P_n(z)} \Rightarrow P_n(z) \cdot C = \text{常数} \cdot \text{矛盾}.$

$\therefore$ 假设不成立. 命题得证.

按此思想, 即可将 $P_n(z)$ 分解为 $P_{n-1}(z) \cdot (z - z_0)$

若 $n-1 \geq 1$ 则 $P_{n-1}(z)$ 仍有零点.

以此类推, 直至 $P_n(z) = P_1(z) (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})$

$P_1(z) = (z - z_n) C \quad \therefore P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) C$

即 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 在 C 上~~有~~存在 n 个零点.

Ch4 级数 (Series)

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ 叫函数项级数 $\sum C_n$ 叫数项级数.

收敛 $\leftrightarrow$ 发散

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) \quad \text{Riemann zeta function}$$

$$= \prod_{p \text{ 是质数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}$$

幂级数: $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 或 $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$

Abel 定理:

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 若在 $z_0 (\neq 0)$ 收敛, 则当 $|z| < |z_0|$ 时
 $f(z)$ 绝对收敛. 若 $f(z)$ 在 z_0 发散, 则 $|z| > |z_0|$ 时 $f(z)$ 发散.

$\sum C_n z^n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum |C_n z^n| < +\infty \Rightarrow \sum C_n z^n$ 收敛.

条件收敛 $\sum C_n z^n$ 收敛, 但 $\sum |C_n z^n| = +\infty$.

设 $\sum C_n z^n$ 收敛半径 $R > 0$.

$\Leftrightarrow \forall z, |z| < R, \sum C_n z^n$ 绝对收敛.

$|z| > R, \sum C_n z^n$ 发散.

R 称为 $\sum C_n z^n$ 的收敛半径 (存在且唯一)

1) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \rho \neq 0$ 存在, 则 $R = \rho$ (充分条件)
 2) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} = \rho \neq 0$ 存在, 则 $R = \rho$

例: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 这里 $C_n = 1$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = 1 \quad \therefore R=1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ (记 $z=w$ 可知 $R=1$)

而 $C_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 即 $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 1 + 0 \cdot w + 1 \cdot w^2 + 2 \cdot w^3 + \dots$

这里 $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ 和 $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ 均算不出来, 但 R 存在, $R=1$

定理:

若 $\sum C_n z^n$ 在 z_0 条件收敛, 则 $R = |z_0|$

由 Abel 定理, $|z| < |z_0|$ 时, $\sum C_n z^n$ 绝对收敛 $\therefore R \geq |z_0|$

若 $R > |z_0|$ 取 $z = \frac{|z_0| + R}{2}$ 易见 $|z_0| = |z| < R$ (与已知矛盾)

~~$\sum C_n z^n$ 绝对收敛~~ 由 Abel $\Rightarrow z_0$ 绝对收敛

与 z_0 条件收敛矛盾 $\therefore R \leq |z_0|$

综上 $R = |z_0|$

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = f(z)$

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = +\infty$$

$$R = |-1| = 1 \quad (\text{在 } -1 \text{ 处条件收敛})$$

例: $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ ~~$|z| < 1$~~ (会发现右边在 $z = \pm 1$ 时为 $\frac{1}{2}$, 而左边不收敛)

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad R=1$$

(这里 $-i, i$ 为奇点, $R=|i|=1$)

性质: R 是 $f(z)$ 离原点最近的奇点到原点的距离!!

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 解析 (在区域 $D: |z| < R$ 内) (R 为收敛半径, $R > 0$)

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n z^{n-1}$$

即在 D 内处处可导, 可积.

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_C z^n dz$$

得到的函数在 D 内也是解析的.

且求导、积分后的函数收敛半径仍为 R (即同 R 时均收敛, 同 R 时均发散)

只不过圆周 $|z| = R$ 上的点敛散性有可能变化. 求导: 某些点可能收敛 $\rightarrow$ 发散
积分: 发散 $\rightarrow$ 收敛

收敛半径 R 的判定方法:

① 若 $f(z)$ 有奇点, 则奇点中到原点最近的一个的模即为 R .

② $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{C_n}}$ (若该极限存在则可这么求, 不存在也不代表发散)

③ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 z_0 条件收敛, 则 $R = |z_0|$

④ $C_n = a_n + ib_n$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

↓ ↓ ↓
收敛半径 R 实部收敛半径 R_1 R_2

$$\text{则 } R = \min \{ R_1, R_2 \}$$

证明④: 不失一般性, 可设 $R = \min \{ R_1, R_2 \}$ (要证 $R = R_1$)

$\because R$ 是 $\sum C_n z^n$ 收敛半径 $\therefore \forall |z| < R$ 有 $\left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right| < +\infty$

易得 ~~$C_n = a_n + ib_n$~~ $C_n = a_n + ib_n$ 故 $|a_n| \leq |C_n|$

$$\Rightarrow \sum |a_n z^n| \leq \sum |C_n z^n| < +\infty$$

$$\Rightarrow \forall |z| < R \text{ 时 } \sum a_n z^n \text{ 绝对收敛. } \Rightarrow R_1 \geq R.$$

再证 $R \leq R_1$.

方法 ① 若 $R > R_1$ 令 $R' = \frac{R+R_1}{2}$ 则 $R < R' < R_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(R')^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(R')^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(R')^n$$

$\because R' < R, \therefore$ 局部收敛.

又: $R_1 \leq R_2$ 故 $R' < R_2 \therefore$ 局部收敛

又: $R' > R$ $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(R')^n$ 收敛, 与之前矛盾. 假设不成立 $\therefore R \leq R'$

方法②

$$|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq |a_n| + |b_n|$$

$$\sum |C_n z^n| \leq \sum |a_n z^n| + \sum |b_n z^n|$$

$$\text{设 } R < |z| < R_1 \leq R_2$$

可得: 局部绝对收敛. 而左边收敛. 矛盾 $\therefore R \leq R'$.

综上 $R \leq R'$ 且 $R' \leq R \therefore R = R'$ 即 $R = \min\{R_1, R_2\}$

一个幂级数, 若其仅第一项系数不为0, 其后均为0, 则其收敛半径 $R = +\infty$.
(非常数项)

几个初等函数的Taylor级数

$$① P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

(①~④为 $|z| \in \mathbb{C}$ 即 $R = +\infty$)

$$② e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$③ \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$④ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = (\sin z)'$$

$$⑤ \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, |z| < 1$$

$$⑥ \text{推广的二项式 } (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, |z| < 1=R$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh \theta}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1-\cosh \theta)} \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh \theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\ln(1 + e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cosh \theta}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sinh \theta}{n}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \alpha^n \quad |z| < 1$$

$$\text{令 } \alpha = -m \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+\alpha)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-m(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} \alpha^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (m+n-1)(m+n-2)\cdots m}{n!} \alpha^n$$

$$= 1 + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (m+n-1)!}{n!} \alpha^n$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (m+n-1)!}{n!} \alpha^n \quad (m \in \mathbb{N}, |z| < 1)$$

$$(\text{注 } 0! = 1)$$

边界点上的敛散性举例:

$$\textcircled{1} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1 = R$$

下面考虑圆周上的敛散性. $z = e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$z^n \not\rightarrow 0$ 故圆周上均发散.

$$\textcircled{2} f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \quad R=1$$

$$|z|=R \text{ 时 } f(z) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1-\cos \theta)} + i \frac{\pi - \theta}{2} \quad (\theta \neq 0) \quad \theta=0 \text{ 时 } f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

故 $\theta \neq 0$ 时收敛. $\theta=0$ 时发散.

$$\text{当 } z = -1 \Rightarrow \theta = \pi \text{ 时 } f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1+1)} = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\textcircled{3} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad R=1$$

$$= \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt$$

$$|e^{i\theta}| \leq 1 \quad f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow f(z)$ 在 $|z|=1$ 处处绝对收敛。

例. $\sum_{n=0}^{\infty} (z-3)^n$ 能否在 $z_0=1$ 收敛 $z_0=4$ 发散?

解: 令 $\xi = z-3 \Rightarrow$ 上式 $= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n$

$z_0 = 1-3 = -2$ 收敛. $\Rightarrow$ 对 $\forall |\xi| < 2$ 均有 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n$ 收敛.

$z_0 = 4-3 = 1$ 发散. 有矛盾. $\therefore$ 不可能.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad \text{幂级数.}$$

Laurent 级数.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$C_n = 0 \ (n \geq 1) \Leftrightarrow$ 幂级数.

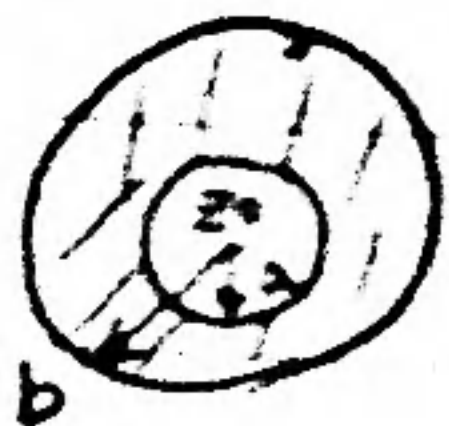
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{b^n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{(z-z_0)^m} \quad (a, b \in \mathbb{C} \text{ 且 } b \neq 0)$$

$$\text{记 } \xi = \frac{z-z_0}{b} \quad \eta = \frac{a}{z-z_0} \quad \text{则 } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n + \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m$$

$$\text{当 } |\xi| < 1 \text{ 且 } |\eta| < 1 \text{ 时 } f(z) \text{ 收敛} \quad f(z) = \frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1-\eta} = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{b}} + \frac{\frac{a}{z-z_0}}{1-\frac{a}{z-z_0}}$$

$$= \frac{b}{b-z+z_0} + \frac{a}{z-z_0}$$

$$\text{收敛} \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_0}{b} \right| < 1, \left| \frac{a}{z-z_0} \right| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z-z_0| < |b|$$



收敛区域: 圆环 (环内绝对收敛, 环外发散, 环上不收敛)

若 $|a| > |b|$, 则为空集.

(我们不考虑 $|a| = |b|$ 情形, 有点难)

环内处处解析.

$$\text{例: } \frac{1}{z-z_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n \quad C_n = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 1 & n = -1 \end{cases}$$

这是一个 Laurent 级数的特例.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{z-1-(z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \text{ 为两个 Laurent 级数相加.}$$

$$\textcircled{1} 0 < |z-1| < 1 \text{ 时} = \frac{1}{z-1-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(-1)(1-(z-1))} - \frac{1}{z-1}$$

$$\text{令 } q = z-1 = \frac{-1}{1-q} - \frac{1}{q} = \left[(-1) \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \right] - \frac{1}{q}$$

$$= (-1)^n \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 1)$$

② $1 < |z-1| < +\infty$ 时.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-1)^n \quad \text{求 } C_n = ?$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1) \left[\frac{z-2}{z-1} \right]} = \frac{1}{(z-1) \left(1 - \frac{1}{z-1} \right)} - \frac{1}{z-1}$$

$$\text{令 } q = \frac{1}{z-1} \quad \text{则 } 1 < |z-1| \Rightarrow |q| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (z-1)^{-(n+1)}$$

$$= \sum_{m=2}^{+\infty} (z-1)^{-m}$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + e^z - 1.$$

$$\text{则 展成 } g(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}} + e^{z-z_0} - 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad C_n = \frac{1}{n!} + 0 \quad r = 0 < |z| < +\infty = R$$

$\frac{1}{z-a}$ 在 $z=b$ 展成 Laurent 级数. $a \neq b$.

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-b)^n \quad C_n = ?$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b-(a-b)} = \frac{1}{(b-a) \left[1 - \frac{z-b}{a-b} \right]}$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-b)^n}{(a-b)^{n+1}} \quad 0 \leq |z-b| < |b-a|$$

是幂级数.

$$\text{总结: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$$\text{令 } z-z_0 = \frac{1}{z} \text{ 故可以展成 } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{z^n}$$

Abel 定理: 若 $g(z)$ 在 z_0 收敛, 则 $\forall z$ 当 $|z| < |z_0|$ 时 $g(z)$ 绝对收敛

若 $g(z)$ 在 z_1 发散, 则 $\forall z$ $|z| > |z_1|$ 时 $g(z)$ 发散.

$g(z)$ 的收敛半径 $R > 0$ 的定义:

当 $|z| < R$ 时 $g(z)$ 绝对收敛.

$|z| > R$ 时 $g(z)$ 发散.

则 $R > 0$ 称为 $g(z)$ 的收敛半径.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ 在 } R=1 \text{ 处收敛} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ 在 } R=1 \text{ 时 } z=1 \text{ 处收敛}$$

$$z = e^{i\theta} \quad (\theta \neq 0) \text{ 时收敛.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} + \ln \frac{1}{1+z}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $R=1$ 处绝对收敛。

收敛半径 R

$$① R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{C_n}} \quad \text{比值法}$$

$$② g(z) \text{ 为 } z \text{ 的幂级数} \Rightarrow R=|z|$$

$$③ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$$

$\downarrow$
 R_1

$\downarrow$
 R_2

$$\Rightarrow R = \min\{R_1, R_2\}$$

④ $g(z)$ 若只有有限个奇点, 则 $R = g(z)$ 离原点最近的奇点的模。

Lamont 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

收敛区域是圆环 $0 < r < |z-z_0| < R < +\infty$

Ch5 留数.

奇点 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 z_0 不解析.

分类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{孤立奇点. } f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2)^4} \\ \text{非孤立奇点. } f(z) = z\bar{z}. \quad g(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \end{array} \right.$

孤立奇点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{可去奇点 removable singularity (微)} \\ \text{极点 pole} \\ \text{本性奇点 essential singularity } \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{(具)}$

例: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 为可去奇点, $\Leftrightarrow f(z)$ 在 z_0 解析

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m+1)!} \quad \text{下级数.}$$

$$f^{(2m)}(0) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \quad f^{(2m+1)}(0) = 0$$

定义1: 令 z_0 是 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$ - L -级数的一个孤立奇点.

例 (1) 当 $C_n=0$ ($n \geq 1$) 时, 称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(此时 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$ 在 z_0 解析)

(2) $\exists m \in \mathbb{N}$ 使 $C_m \neq 0$, 但 $C_n = 0$ $n \geq m+1$

此时 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$ 称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶奇点.

(3) $\exists$ 无穷个 $n_k \in \mathbb{N}$ 使 $C_{n_k} \neq 0$ $k=1, 2, \dots$

此时称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

Date 16

例1: $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ $z_0=0$ 可去奇点

例2: $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $z_0=0$ 二阶极点

$g(z) = \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots$ $z_0=1$ 四阶极点

例3: $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$
 $C_n = \frac{1}{n!} \neq 0 \quad n=0, 1, 2, \dots$ $z_0=0$ 本性奇点

Picard 大定理

If $f(z)$ has an essential singularity at z_0 and let U be any neighborhood of z_0 , then for any $w \in \mathbb{C}$, except one value, the ~~equation~~ equation $f(z)=w$ has infinitely many solutions in U .

翻译: 若 $f(z)$ 在点 z_0 具有本性奇点, 则在任何含有 z_0 的开集中, 对 $\forall$ 非 ∞ 的 $w \in \mathbb{C}$ 有无穷多个 z 使 $f(z)=w$. w 最多只有一个例外.

Picard 小定理:

→ (有2个值取不到)

若 $f(z)$ 处处解析且 $f(z)$ 不取2个复数, 则 $f(z)$ 是常数.

$g(z) = (f(z)-A)(f(z)-B) \equiv 0. \quad (A \neq B)$

$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = f_0$

(一个处处解析的函数, 最多只有1个值取不到)

若为常数
不是

$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^z = A \quad (A \neq 0) \\
 g(z) &= \overset{\rightarrow z \rightarrow \infty}{P_0(z)} = A \quad A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow Q_n(z) = P_n(z) - A = 0 \text{ 多项式中至少有1根.} \\
 f(z) &= \sin z = A \quad A \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

定义2: 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在有限, 则 z_0 是 f 的可去奇点.

1) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的一个极点.

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, 则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

解析函数零点的孤立性.

$f(z) \neq 0$ 解析. $f(z) = 0$

$\Rightarrow \exists z_0$ 的一个邻域 U . 在 U 内 z_0 是 f 的唯一零点.

例 $f(z) = \sin z$ 在 $z_0 = 0$ 处 $f(z) = 0$. 但 $\exists \delta$. $\forall z \in (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$ 的

$f(z) = 0$ 仅 $z_0 = 0$ 一个根. (其它零点不与 $z_0 = 0$ 挨着)

(而实函数就无此特征)

定理1证明.

$$f(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析} \Leftrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

$$\text{因 } f(z_0) = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots \neq 0$$

假设 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ 且 $f^{(j)}(z_0) = 0$ ($0 \leq j \leq n-1$) (即第 n 次不为0的)

$$\Rightarrow f(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + \dots$$

$$= (z-z_0)^n \left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{\varphi(z)} + O(z-z_0) \right] \quad \text{证}$$

$\varphi(z)$

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$$

Date 17

则只需证明 $\varphi(z_0) \neq 0$. 且 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析.

则由 Ch1. 29 题可知. $\exists V$. s.t. $\varphi(z) \neq 0$. ($z \in V$)

$$\varphi(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + O(|z-z_0|) \Rightarrow \varphi(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + 0.$$

$$\text{又 } \varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \Rightarrow z_0 \text{ 是 } \varphi(z) \text{ 的一个孤立零点.}$$

$$\text{但 } \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0 \text{ 存在 } (\neq \infty)$$

↓
连续用 n 次洛必达法则.

$\Rightarrow z_0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点 $\Rightarrow \varphi(z)$ 在 z_0 点解析.

解析函数的唯一性定理.

f, g 在 D 解析. 若有 $z_n \rightarrow z_0 \in D$. ($z_n \in D$).

$$\text{使 } f(z_n) = g(z_n) \Rightarrow f(z) = g(z) \quad (\forall z \in D)$$

证明: 令 $h(z) = f(z) - g(z)$.

$$\Rightarrow h(z_0) = 0. \quad h(z_n) = 0 \quad \mathbb{N}$$

$$h \text{ 解析. } h(z_n) = 0 \quad h(z_0) = 0 \quad (z_n \rightarrow z_0)$$

$$\Rightarrow z_0 \text{ 是 } h(z) \text{ 的一个非孤立零点. } \Rightarrow h(z) \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) = g(z) \quad (z \in D).$$

定理:

f, g 在 D 解析. 若 $f(z)g(z) \equiv 0$. $z \in D$.

$$\Rightarrow f(z) \equiv 0 \quad \text{或} \quad g(z) \equiv 0.$$

证明: 设 $f(z) \not\equiv 0$. $\exists z_0$. s.t. $f(z_0) \neq 0$. $z_0 \in D$.

因 f 解析 $\Rightarrow$ 连续. 由 Ch1. 29 题 $\Rightarrow \exists V$. s.t. $z_0 \in V$ 且 $f(z) \neq 0$ ($z \in V$)

例: $f(z) \equiv 0 \Rightarrow \exists z \in D \text{ s.t. } f(z) = 0 \Rightarrow \forall z \in D, f(z) \equiv 0$

$f(z) = f'(z) = \dots = f^{(n-1)}(z) = 0$ 但 $f^{(n)}(z) \neq 0$
这时 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶(或)零点

例: $f(z) = z^n$. $z_0 = 0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶零点.

例: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 任意阶导数均为 0.

但对任何 n , 只能提有限个 x^n (即 $x^n, n \neq \infty$)

故上述 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不解析.

$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 右导数都不连续, 故一定不解析, 不解析.

设 D 是复平面的单连通区域, $f(z)$ 是 D 内定义的亚纯函数 (除有限个点外, $f(z)$ 在 D 内处处可导). C 是 D 内一简单闭曲线, C 内共有 N 个奇点 $z_1, z_2, \dots, z_N$.
则由复变函数论知 $\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} f(z) dz$. 这里 $C_1, \dots, C_N$ 是分别包围 $z_1, \dots, z_N$ 且互不相交, 互不包含在 C 内的简单闭曲线.

设 z_k 点是 $f(z)$ 的 n_k 阶极点

② C_k $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-z_k)^k$ (L -级数)

$$\oint_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \oint_{C_k} (z-z_k)^k dz$$

用 $I = \oint \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$ 可知 $\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i C_{-1} = 2\pi i \text{Res}[f, z_k]$

$C_{-1} = \underset{-1}{\text{Res}}[f, z_k]$ 不同 z_k , 其对应的 C_k 不同

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N 2\pi i \text{Res}[f, z_k] = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f, z_k]$$

Residue B.B. ~~Residue B.B.~~

$$\text{例 } f(z) = \frac{A_1}{(z-1)^2} + \frac{A_2}{(z-2)} + \frac{A_3}{(z-3)^3} + \frac{A_4}{z-4} + \sin z^2$$

$$\oint_C f(z) dz \quad C: |z|=5$$

$$\text{解 } \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \oint_{C_k} f(z) dz \quad C_k: |z-k| = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = C^{(1)}_{-2} \quad A_2 = C^{(2)}_{-1} \quad A_3 = C^{(3)}_{-3} \quad A_4 = C^{(4)}_{-1}$$

$$A_1 = \text{Res}[f, 2] \quad A_2 = \text{Res}[f, 4] \quad (\text{而 } z_1 \text{ 和 } z_3 \text{ 处 } C_1 \text{ 为 } 0)$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (A_2 + A_4)$$

$$\triangle \text{ 何时 } C_{-1} = \text{Res}[f, z_0] ?$$

$$\text{例 } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad P(z_0) \neq 0 \quad Q(z_0) = 0 \quad Q'(z_0) \neq 0$$

$$\text{则 } \text{Res}[f, z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \neq 0$$

$$(Q(z) = (z-z_0) \varphi(z) \quad Q'(z_0) = \varphi(z_0) \neq 0)$$

$$\text{①. } I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta} d\theta \quad |a| > |b| \geq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(-阶极值)

$$(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta) d\theta)$$

$$\text{解 } \text{令 } z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2zi} \end{cases}$$

$$\text{代入原式 } I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(a+b\frac{z^2+1}{2z})} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2az + bz^2 + b} dz$$

$$\text{若 } b=0 \Rightarrow I = \frac{2}{\gamma} \cdot 2\pi i \quad \frac{1}{2a} = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{若 } b \neq 0. \quad \text{考虑 } bz^2 + 2az + b = 0.$$

$$z^2 + \frac{2a}{b}z + 1 = 0$$

$$z_1 z_2 = 1$$

故 z_1, z_2 的模互为 1. 1 个在单位圆外, 1 个在单位圆内.

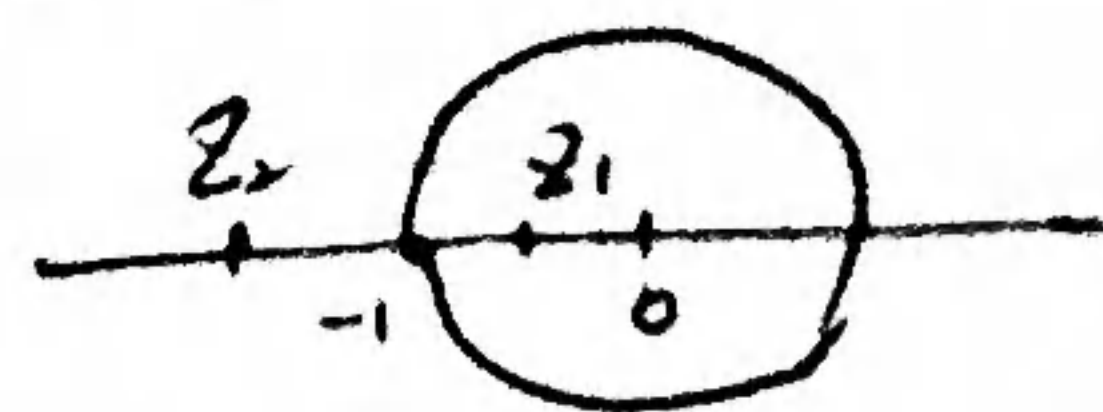
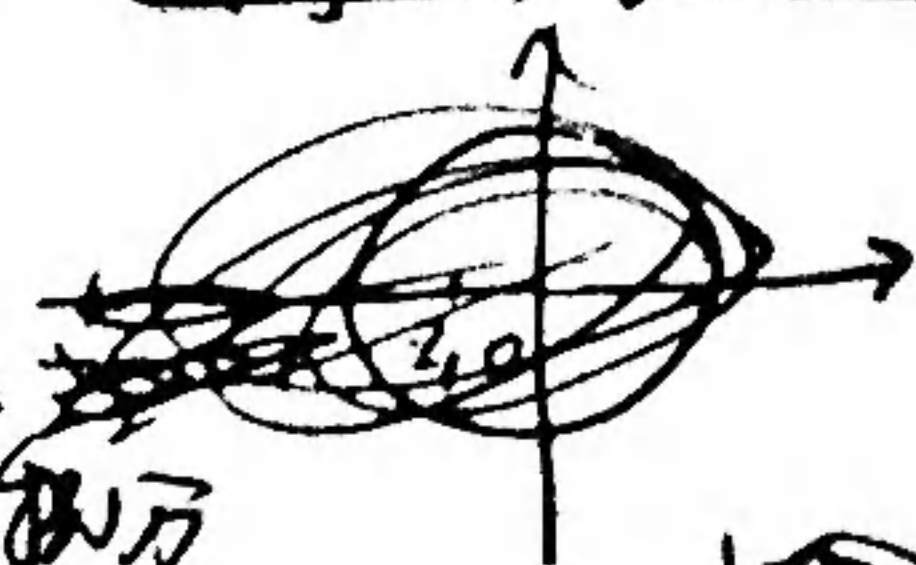
$$z_0 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad (z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b})$$

因 $|a| > |b|$ 故 z 有 2 个不同根.

$$\text{若 } a > 0, b > 0. \Rightarrow z_2 < -\frac{a}{b} < -1$$

$$z_1 < 0.$$

故 z_1 在单位圆内, 我们以 z_1 为极点作围线积分



$a < b < 0$ 时同理

$$\text{故 } I = 2\pi i \cdot \text{Res} \left[\frac{2}{z} \left(\frac{1}{2az + bz^2 + b} \right), z_1 \right]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{z_1} \cdot \text{Res} \left[\frac{1}{2az + bz^2 + b}, z_1 \right] \quad \text{利用 } \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$$

$$= 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2bz_1 + 2a} = 2\pi i \frac{1}{bz_1 + a} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

② 高阶极点.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \quad n \geq 2$$

$$g(z_0) \neq 0. \quad g \text{ 在 } (z_0) \text{ 解析}$$

$$C_1 = \text{Res}[f, z_0] \quad \oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz$$

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = f^{(m)}(z_0) \frac{2\pi i}{m!} \quad \text{用 } n \text{ 代 } m+1, g(z) \text{ 代 } f(z) \text{ 得.}$$

$$\therefore \text{Res}[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)$$

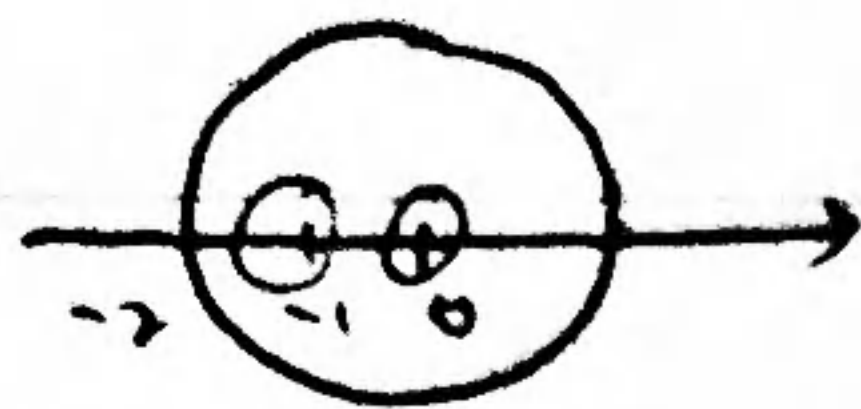
Date 19

$$\text{例: } \oint_{|z|=\infty} \frac{1-\cos z^2}{z^n} dz$$

$$= 2\pi i \cdot (1-\cos z^2)^{(n-1)} \Big|_{z=0}$$

(这里将 $\cos z^2$ Taylor 展开到第 $(n-1)$ 项)

$$\text{例: } I = \oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{2}z^3}}{1+z} dz$$



方法: $\oint_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{2}z^3}}{1+z}$ 在 $|z|=2$ 内有奇点: $z=-1$ 和 $z=0$ (本性).

$$\Rightarrow I = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}z^3}}{1+z} dz + \oint_{|z|=1-\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}z^3}}{1+z} dz = I_1 + I_2$$

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{\frac{1}{2}z^3}}{1+z}, -1 \right] = 2\pi i \frac{e^{\frac{1}{2}(-1)^3}}{1} = -2\pi i e^{-\frac{1}{2}}$$

$$I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \right) dz$$

$$= \oint z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots) dz$$

$$= \oint z^3 \left[\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots \right) z^{-4} \right] dz \quad (\text{提取 } z^{-1} \text{ 系数})$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots \right)$$

$$= 2\pi i \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \right) - \frac{1}{3} \right]$$

$$= 2\pi i (e^{-1} - \frac{1}{3})$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3}\pi i$$

取 $t = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| = 2$ 时 $|t| = \frac{1}{2}$

$$dz = -\frac{1}{t} dt \quad z = 2e^{i\theta} \Rightarrow t = \frac{1}{2}e^{-i\theta}$$

$|z|=2$ 为逆时针 $(\theta: 0 \rightarrow 2\pi)$

但对应的 $|t| = \frac{1}{2}$ 曲线为顺时针，故要加负号。

$$\Rightarrow \text{原式} = - \oint_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{e^t \left(\frac{1}{t}\right)^3}{1+t} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \oint_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{e^t}{t^4(1+t)} dt \quad \text{（这样就没有本性奇点了！！好极了...）}$$

$$g(t) = \frac{e^t}{1+t}$$

$$f(t) = \frac{g(t)}{t^4}$$

即求高阶极点的 Res

$$\text{对 } g(t) \text{ 求 3 阶导} = 2\pi i \cdot g_{(3)}$$

$$\text{也可将 } g(t) \text{ Taylor 展开} \quad g(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k\right)$$

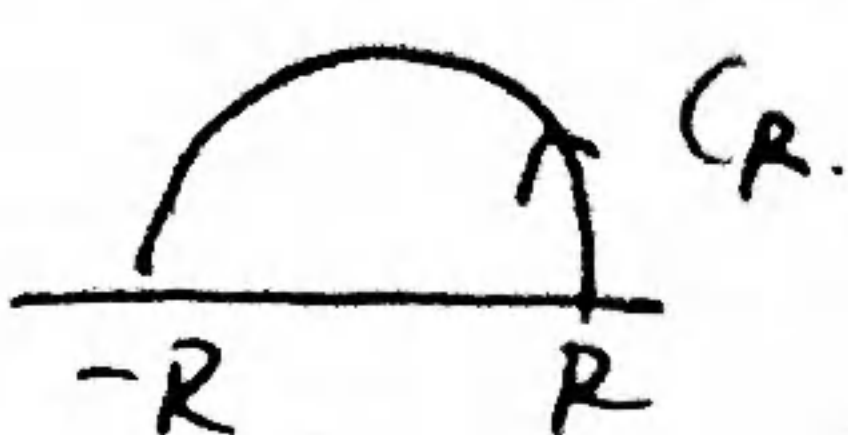
$$= \left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots\right) (1-t+t^2-t^3+\dots)$$

求 t^3 的系数 $(g(t))$ 中 t^3 系数即 $f(t)$ 的 (-1)

$$= -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{2\pi i}{3}$$

求定积分

$$\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right]$$


这里 $P(z)$, $Q(z)$ 是多项式. $Q(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. $Q(z) \neq 0$ 当 $|z|=R$ 且 $\operatorname{Im} z > 0$ 时.

若 $\deg Q \geq \deg P$ 则 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right]$$

其中 z_k 是 $Q(z)$ 在上半复平面的零点.

例: $I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} \quad (a>0, b>0)$

不包括 $-ai, -bi$ 因为 z 只包括上半复平面内的零点.

先设 $a \neq b$.

$$2I_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ai \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, bi \right] \right)$$

$$\Rightarrow I_{a,b} = \pi i \left[\left. \frac{1}{4z^3 + 2(a^2+b^2)z} \right|_{z=ai} + \left. \frac{1}{4z^3 + 2(a^2+b^2)z} \right|_{z=bi} \right]$$

(分子、分母上下同时求导)

$$= \pi i \left[\frac{1}{-4a^3i + 2(a^2+b^2)ai} + \frac{1}{-4b^3i + 2(a^2+b^2)bi} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2(b^2a - a^3)} + \frac{\pi}{2(a^2b - b^3)} = \frac{\pi}{2(b+a)ab}$$

$$\therefore \text{若 } a=b \Rightarrow I_{a,a} = \frac{\pi}{4a^3} \quad \text{若 } a \neq b \Rightarrow I_{a,b} = \frac{\pi}{2(a+b)ab}$$

例: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} \quad n \in \mathbb{N}$.



$$2I_n + \int_{C_R} \frac{1}{1+z^{2n}} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k \right]$$

令 $R \rightarrow +\infty \Rightarrow I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k \right]$

$$= \pi i \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n z_k^{2n-1}} \right)$$

用 $z_k^{2n} + 1 = 0$ 得

$$\frac{1}{z_k^{2n-1}} = -z_k \quad \text{代入} = -\frac{\pi i}{2n} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right)$$

(注意: 取上半圆!!)

易知 $z_k^{2n} = -1 = e^{i\pi + 2(k-1)\pi i} \quad k=1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow z_k = e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}} = e^{\frac{k\pi i}{n}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{2n}}$$

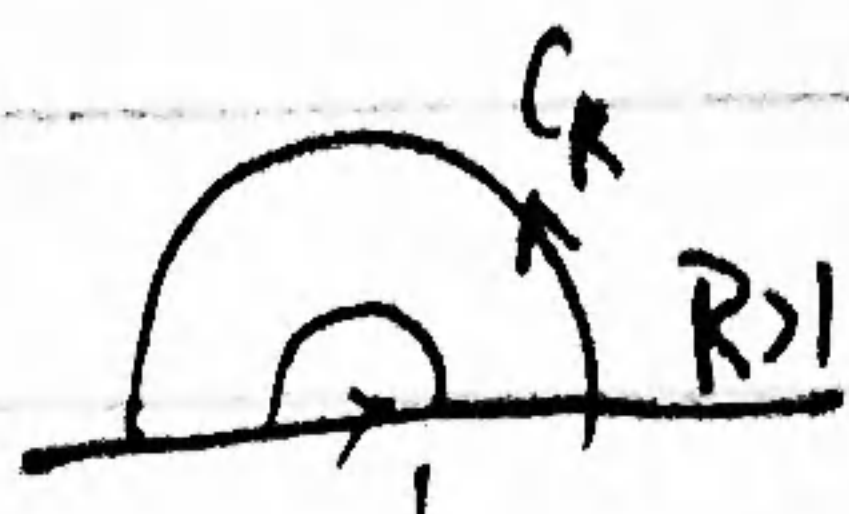
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n z_k = e^{-\frac{\pi i}{2n}} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}} (1 - e^{\frac{\pi i}{n} \cdot n})}{1 - e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{ze^{\frac{\pi i}{2n}}}{1 - e^{\frac{\pi i}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^{-\frac{\pi i}{2n}} - e^{\frac{\pi i}{2n}}}{2}} = \frac{1}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{\pi i}{2n} \cdot \frac{1}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$$

例: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx \quad (n > 0)$

例: $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad n \in \mathbb{N}$



$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^n} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(1+z^2)^n}, i \right]$$

Date 21.

$$\text{令 } R \rightarrow +\infty \Rightarrow J_n = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(1+z^2)^n}, z \right]$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-i)^k \quad \text{求 } C_{-1} = ?$$

$$\frac{1}{(z+i)^n} = \frac{1}{(z-i+i)^n} = \frac{1}{(2i)^n \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^n} = \frac{1}{2^n i^n} (1+w)^{-n}$$

$$\text{其中 } w = \frac{z-i}{2i}$$

$$(1+w)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} w^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!} w^k$$

$$\text{故 } \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z-i)^n} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k-1)\cdots n}{k!} \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k \right] \frac{1}{2^n i^n}$$

$$\text{即 } \frac{1}{(z-i)^n} \text{ 的系数} = (-1)^{n-1} \frac{(n+n-1-1)(n+n-1-2)\cdots n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(2i)^{n-1}} \frac{1}{2^n i^n}$$

即为 $\frac{1}{(1+z^2)^n}$ 的 C_{-1}

$$\Rightarrow J_n = \pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(2n-2)\cdots n}{2^{n-1} i^{n-1} 2^n i^n}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n-2)! \pi}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}$$

$$J_n = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{1+z^n} = \oint_{|z|=1} \frac{z^{2n}}{1+z^{2n}} dz$$

$$\left(\frac{z^{2n}}{1+z^{2n}} = \frac{z^{2n}-1}{1+z^{2n}} + \frac{1}{1+z^{2n}} \right)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k \right]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{-2\pi i}{n} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right)$$

$$z^{n+1} = (z-z_1) \cdots (z-z_n) = z^n - \left(\sum_{k=1}^n z_k\right) z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n z_k$$

$$n=1 \text{ 时 } I_1 = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{1+z} = 2\pi i \cdot \frac{1}{1} = 2\pi i$$

$$n>1 \text{ 时 } \sum_{k=1}^n z_k = 0 \Rightarrow I_n = 0 \Rightarrow \therefore I_n = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

例.

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx$$

有 $\frac{x \cos x}{x^2+a^2} \rightarrow 0$

$$\text{令 } J_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+a^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx$$

$$\text{则有 } 2I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \text{Im}(J_a)$$

$$R>a \text{ 时 } \int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2} dx + \int_{CR} \frac{z e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z e^{iz}}{z^2+a^2}, ai \right]$$

$\downarrow$
 $R \rightarrow +\infty$ 时 $\int_{CR} \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow J_a = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z e^{iz}}{z^2+a^2}, ai \right]$$

$$= 2\pi i \frac{ai e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi i}{e^a}$$

$$I_a = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(J_a) = \frac{\pi}{2e^a} \Rightarrow I_0 = \lim_{a \rightarrow 0^+} I_a = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Date 22

Q1: $I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \quad (a>0, b>0)$

$$I_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = 2\pi i \left(\text{Res} \left[\frac{z e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, a \right] + \text{Res} \left[\frac{z e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, b \right] \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{a i e^{-a}}{4z^3 + 2(a^2+b^2)z} \Big|_{z=ai} + \frac{b i e^{-b}}{4z^3 + 2(a^2+b^2)z} \Big|_{z=b} \right)$$

$$= \frac{(-i e^{-b} + i e^{-a}) \pi i}{(b-a)(a+b)}$$

$$\Rightarrow I_{a,b} = \frac{\pi}{2(b-a)(b+a)} \cdot \frac{e^b - e^a}{e^{a+b}} = \frac{\pi}{2e^{a+b}(a+b)} \frac{e^b - e^a}{b-a}$$

Ch6 解析映射

设 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数且 $f(z) \neq \text{常数}$, 这时 $f(z)$ 也解析. 且 $f(z) \neq 0$. 由 Ch5 知 $f(z)$ 的零点是孤立的, 即在 D 内 $f(z)$ 的零点个数最多可数. 若 D 是有界的区域, 则 $f(z)$ 的零点个数有限.

例: $f(z) = e^z$

$f(z) = e^z \neq 0$

无零点

$f(z) = \sin z$

$f(z) = \cos z$

只有可数个零点

$h(z) = P_n(z)$

$h'(z) = P_n'(z)$

最多有 $n-1$ 个零点

(n 次多项式)

设 $z(t) = x(t) + iy(t) \in C'[a, b]$ 且 $z'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$

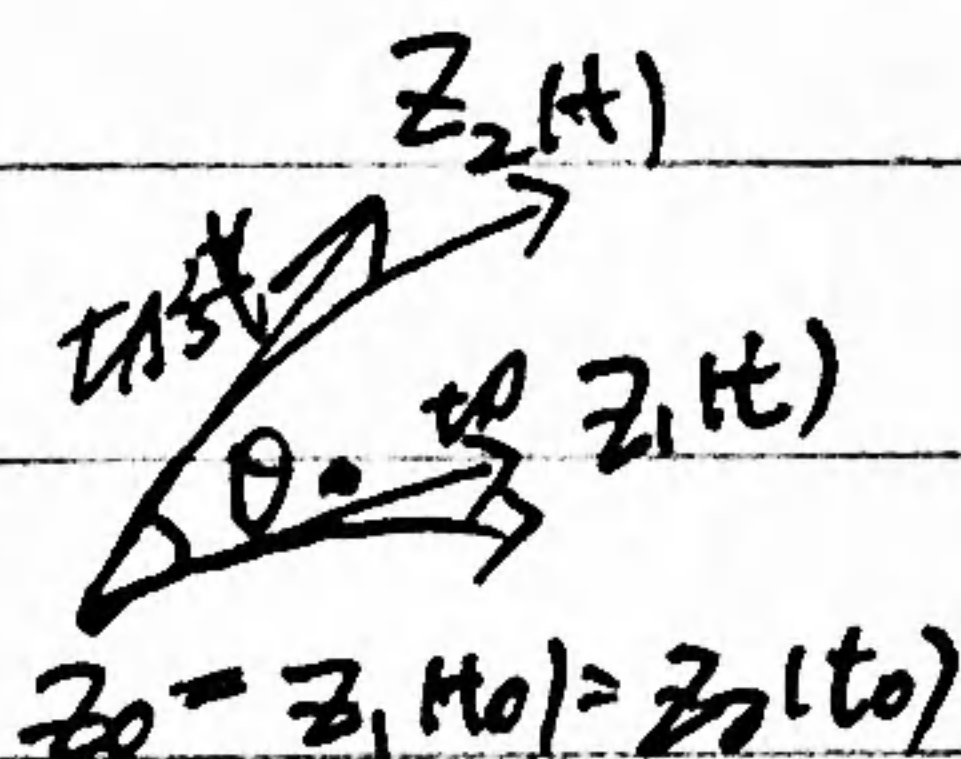
则称 $z(t)$ 是 C' 曲线或光滑曲线在 $[a, b]$ 光滑.

设 $I = \bigcup_{k \in N} [a_k, b_k]$ $z(t) = \bigcup_{k \in N} (a_k, b_k)$ 上光滑.

则 $z(t)$ 在 I 上分段光滑.

$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$

$z'(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t) = y'(t) = 0$ 则此处为奇点.

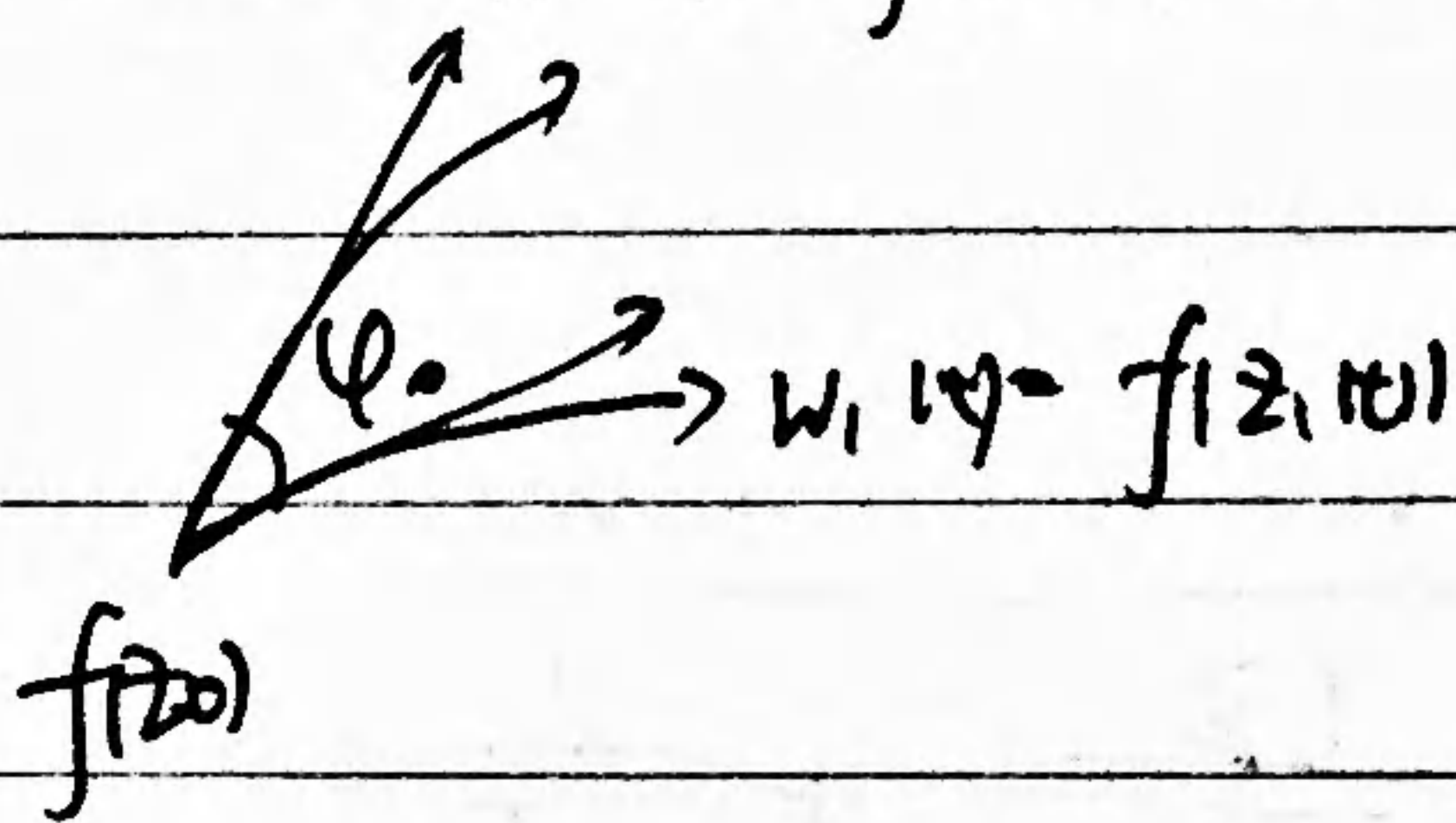


$\theta_0 = \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$

θ_0 为 z_0 与 z_1 在 z_0 点的夹角.

($t \geq t_0, t < +\infty$)

$w_2(t) = f(z_2(t))$



$\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0)$

结论: 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, $\varphi_0 = \theta_0$. 保角.

证明思路.

$$\varphi_0 = \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0)$$

$$w_2(t) = f(z_2(t)) \quad w_1(t) = f(z_1(t))$$

$$\Rightarrow w_2'(t) = f'(z_2) z_2'(t) \quad w_1'(t) = f'(z_1) z_1'(t)$$

(以上均不为0在 t_0 处)

$$\text{故 } \varphi_0 = \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0)$$

$$= \arg f'(z_2) + \arg z_2'(t_0) - (\arg f'(z_1) + \arg z_1'(t_0))$$

$$= \theta_0$$

分式线性映射. $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ 有理分式.

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \neq \text{常数} \quad (ad-bc \neq 0)$$

(若 $ad-bc=0$ 则 w 为常数)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A \neq 0$$

$$w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0. \quad a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$$

该映射对 $\mathbb{C}$ 中曲线处处保角.

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{k(az+b)}{k(cz+d)} \quad (k \neq 0) \quad \text{不变.}$$

$$\text{§4.11} \quad k = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{az}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{cz}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

Date 24.

$$= \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \quad a' = \frac{a}{\sqrt{ad-bc}} \quad b' = \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \quad c' = \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} \quad d' = \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}$$

$$\Rightarrow a'd' - b'c' = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

故不失一般性. 我们总可以设 $ad-bc=1$. $\Leftrightarrow \det A=1$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

当 $\det A_1 = \det A_2 = 1$ 时 A_1, A_2 分别与 $w_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $w_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ 形成一一对应的关系.

$$w_2(w_1(z)) = \frac{a_2 w_1 + b_2}{c_2 w_1 + d_2} = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{A_2 z + B_2}{C_2 z + D_2}$$

$$w_1(w_2(z)) = \frac{a_1 w_2 + b_1}{c_1 w_2 + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{A_1 z + B_1}{C_1 z + D_1}$$

$$\Leftrightarrow A_2 A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 A_1 = \det A_1 A_2 = 1$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \quad \text{但一般地 } A_1 A_2 \neq A_2 A_1$$

在矩阵乘法下. 分式线性映射. 构成乘法群.

单位映射. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow w \equiv z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z = \frac{-wd+b}{wc-a} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad (\det A^{-1} = 1)$$

取逆映射也存在

Abel 群.

若 z_1, z_2 是相异的 3 个点. 其像为 w_1, w_2, w_3 的映射.
其解可以是 3 次线性映射.

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} / \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} / \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \quad (\text{不变式 I})$$

例: $-1, 0, 1 \rightarrow 1, i, 1$

解法 1: $\frac{w-1}{w-i} / \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z-1}{z-i} / \frac{1-(-1)}{1-0}$

$$\Rightarrow (iz-1)w = z-i \quad \therefore w = \frac{z-i}{iz-1}$$

解法 2: 设 $w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow 1 = \frac{a(-1)+b}{c(-1)+d} \Rightarrow b-a=d-c$

$$i = \frac{b}{d} \Rightarrow b=di$$

$$-1 = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow a+b=-d-c$$

将 a, b, c 用 d 表示出来.

$$\Rightarrow w = \frac{-dz+di}{-di z+d} \quad (\text{令 } d=-1) = \frac{z-i}{iz-1}$$

共有 3 个不动点. 则映射必为恒等映射.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc \neq 0. \quad (\text{可以认为 } ad-bc=1)$$

不动点: $w(z)=z$ 的解称为 w 的不动点.

$$\Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$c=0 \text{ 时: } \begin{cases} d-a \neq 0 & z = \frac{b}{d-a} \quad (1 \text{ 个不动点}) \\ d-a=0 & \begin{cases} b=0 & \text{无穷多解. } (z \in \mathbb{C} \text{ 无穷个不动点}) \\ b \neq 0 & \text{无解} \quad (0 \text{ 个不动点}) \end{cases} \end{cases}$$

$$c \neq 0 \text{ 时: } \begin{cases} (d-a)^2 + 4bc \neq 0 & (2 \text{ 个不动点}) \\ (d-a)^2 + 4bc = 0 & (1 \text{ 个不动点}) \end{cases} \quad (\text{因为 } \Delta \in \mathbb{C}, \text{ 故 } \Delta < 0 \text{ 也有 2 个复根})$$

总结: 不动点个数为 0, 1, 2, ($3 \equiv \infty$)

1) 平移 $w = z + \alpha$

2) 伸缩 $w = \alpha z \quad \alpha = r_0 e^{i\theta_0}, r_0 > 0, \theta_0 \in [0, 2\pi)$

~~3) 旋转~~ 设 $w = x' + iy' = r_0 e^{i\theta_0} (x + iy)$

$$= r_0 (\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) (x + iy)$$

$$= r_0 (x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0) + ir_0 (x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ 正交

3) 倒数 $w = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$

$$z = re^{i\theta} \quad w = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$w = \frac{1}{z} = z \text{ 时 } z = \pm 1$$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} c=0 & w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{伸缩+平移} \\ c \neq 0 & w = \frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a(z+\frac{b}{a}-\frac{d}{c})}{c(z+\frac{d}{c})} \end{cases}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c(z+\frac{d}{c})} \quad \text{平移+倒数+伸缩+平移}$$

定义: Γ 圆 = 圆 $\cup$ 直线.

定理: 分式线性映射保 (Γ) 圆.

证明: (i) $\checkmark$ (ii) $\checkmark$

(直线方程: $\alpha \bar{z} + \alpha z + \beta = 0 \quad \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$)

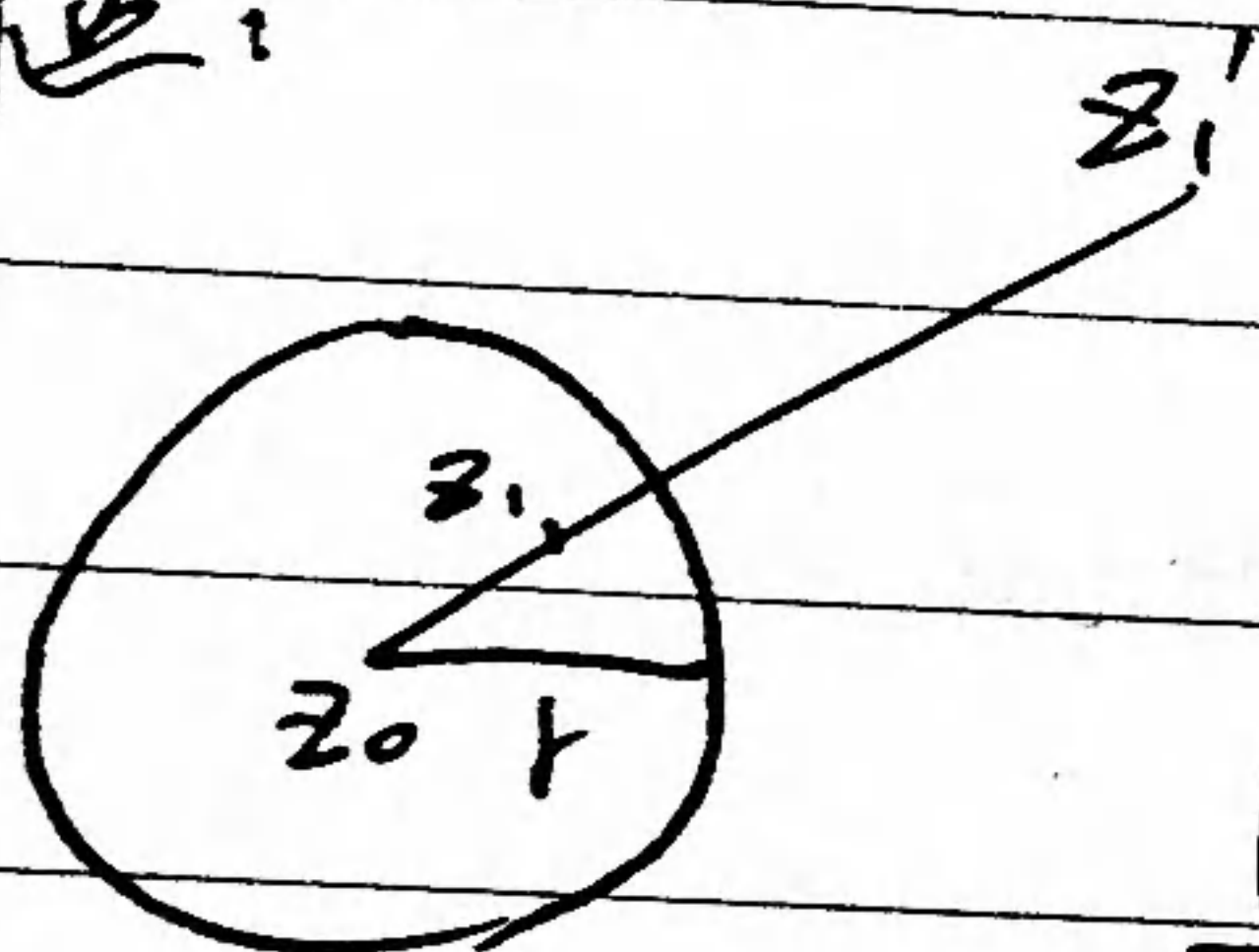
(圆方程: $z\bar{z} + \alpha \bar{z} + \alpha z + \beta = 0$)

(3) 例数 $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow \frac{\alpha}{w} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}} + \beta = 0$.

$$\Rightarrow \beta w \bar{w} + \alpha w + \bar{\alpha} \bar{w} = 0$$

$\alpha = \bar{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha w + \bar{\alpha} \bar{w} = 0 & \beta = 0 \text{ 直线} \\ w \bar{w} + \frac{\alpha}{\beta} w + \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \bar{w} = 0 & \text{圆.} \end{cases}$

对称点:



$$z'_1 - z_0 = k(z_1 - z_0) \quad (k > 1)$$

$$\frac{|z'_1 - z_0|}{r} = \frac{r}{|z_1 - z_0|} \quad z'_1 \text{ 叫 } z_1 \text{ 关于 } \Gamma \text{ 的对称点}$$

$$\Leftrightarrow |z'_1 - z_0| \cdot |z_1 - z_0| = r^2$$

$$k|z_1 - z_0|^2 = r^2 \Rightarrow k = \frac{r^2}{|z_1 - z_0|^2} > 1$$

若 $r=1$ 单位圆的对称点 $k = \frac{1}{|z_1 - z_0|^2}$

当 $z_0=0$ 时 $\Rightarrow k = \frac{1}{|z_1|^2}$

$$z'_1 = k z_1 = \frac{z_1}{|z_1|^2} = \frac{z_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

定理: 分式线性映射保对称点.

1) 求单位圆盘 $|z| < 1$ 至单位圆盘 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$
 并使 $w(z_0) = 0$. $|z_0| < 1$.

解: $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(z-z_0)}{c(z-z_0)}$ (当 $c \neq 0$ 时).

$= \alpha \left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \right)$ 根据保对称点. 可得 $z = \frac{1}{\bar{z}_0}$

($z_0 \rightarrow 0$ $z \rightarrow \infty$. 故 z_0 与 $\frac{1}{\bar{z}_0}$ 对称, $z_1 = \frac{1}{\bar{z}_0}$)

则 $w = \alpha \frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}} = \bar{z}_0 \alpha \frac{z-z_0}{-1+z\bar{z}_0}$

$= -\alpha \bar{z}_0 \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0} = \beta \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$ 求 $\beta = ?$

用边界 $\rightarrow$ 边界. $|z|=1 \Leftrightarrow |w|=1$

$\Rightarrow 1 = |w| = |\beta| \left| \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0} \right| = |\beta| \left| \frac{z-z_0}{z\bar{z}-\bar{z}_0 z} \right| = |\beta| \frac{|z-z_0|}{|z| |\bar{z}-\bar{z}_0|}$

($|z|=1$) 故 $= |\beta| \cdot \left| \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \right| = |\beta|$

$\therefore w = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ $|z_0| < 1$ $\theta \in [0, 2\pi)$ 解毕

若 $z_0 = 0 \Rightarrow w = e^{i\theta} z$ 旋转.

$\Rightarrow \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ 不变式 $\Leftrightarrow \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$. 则 $\frac{dw}{dz} = \frac{a-d}{(cz+d)^2}$
 $= \frac{e^{i\theta}(1-\bar{z}_0 z)}{(1-\bar{z}_0 z)^2}$

若 $|w| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$
 $|w| > 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \quad \Rightarrow |w|=1 \Leftrightarrow |z|=1$

$$\text{证 } \frac{dw}{dz} = \frac{e^{i\theta} (z - z_0)}{1 - \bar{z}_0 z} \Rightarrow \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

$$\text{证 } = \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2} \text{ 即可.}$$

$$\text{因 } w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \Rightarrow 1 - |w|^2 = 1 - w \bar{w}$$

$$1 - e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{-i\theta} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - \bar{z}_0 z} = 1 - \frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

$$= \frac{(1 - \bar{z}_0 z)(1 - z_0 \bar{z}) - (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

$$= \frac{(1 - z_0 \bar{z}_0)(1 - z \bar{z})}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

构造圆周的映射

$$|z - z_0| < r \rightarrow |w - w_0| < R. \text{ 且 } w(z_0) = w_0.$$

$$\text{这里 } |z - z_0| < r$$

$$z' = \frac{z - z_0}{r}$$

$$w' = \frac{w - w_0}{R}$$

$$z'_1 = \frac{z_1 - z_0}{r}$$

$$|z'| < 1 \rightarrow |w'| < 1 \Rightarrow w' = e^{i\theta} \frac{z' - z'_1}{1 - \bar{z}'_1 z'}$$

$$\Rightarrow \frac{w - w_0}{R} = e^{i\theta} \frac{\frac{z - z_0}{r} - \frac{z_1 - z_0}{r}}{1 - \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(z - z_0)}{r^2}}$$

$$w = w_0 + e^{i\theta} R \frac{z - z_1}{r^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)(z - z_0)}$$

求上半平面 $\text{Im} z > 0$ 到单位圆盘 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$

解: 用有一点 $z_1 \rightarrow 0$ ($\text{Im} z > 0$) 而 z_1 关于 x 轴对称点为 $\bar{z}_1$, 且 $\bar{z}_1 \rightarrow \infty$

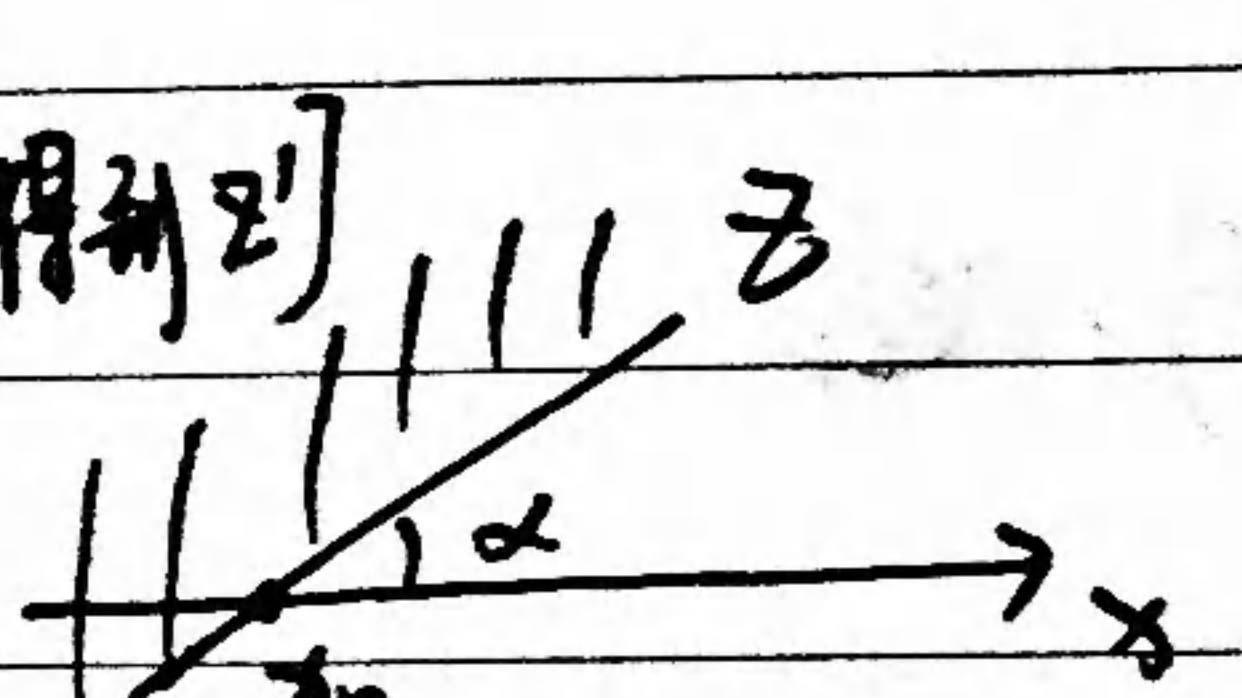
故 $w = \frac{\alpha(z-z_1)}{z-\bar{z}_1}$ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 下面求 α .

x 轴 $\rightarrow |w|=1$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \bar{x}$

$\Rightarrow 1 = |w| = |\alpha| \left| \frac{x-z_1}{x-\bar{z}_1} \right| = |\alpha| \left| \frac{x-z_1}{\bar{x}-\bar{z}_1} \right| = |\alpha| \Rightarrow \alpha = e^{i\theta}$

$\therefore w = e^{i\theta} \frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1}$ ($\text{Im} z > 0, \theta \in [0, 2\pi)$)

特别地, 令 $\theta=0$ $z=i \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$

扩展 令 $z' = (z-x_0)e^{-i\alpha}$ 

$w' = \frac{w-w_0}{R}$

$\text{Im} z' > 0 \rightarrow |w'| < 1$ 故有

$w' = e^{i\theta} \frac{z'-z'_1}{z'-\bar{z}'_1}$

$\Rightarrow \frac{w-w_0}{R} = e^{i\theta} \frac{(z-x_0)e^{-i\alpha} - (z_1-x_0)e^{-i\alpha}}{(z-x_0)e^{-i\alpha} - (\bar{z}_1-x_0)e^{-i\alpha}}$

$\therefore w = w_0 + R e^{i\theta} \frac{z-z_1}{z-x_0 - \bar{z}_1 - x_0 e^{2i\alpha}}$

使 z' 与 z_1 可 ~~互换~~ z' 定义域与旋转 z 定义域相同. 最后形式也最简洁

求证明: $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 将 $\text{Im} z > 0 \rightarrow \text{Im} w > 0$. 且 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(1) $ad-bc > 0$

证: 设 $z = x+iy \Rightarrow w = \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} = \frac{(ax+b)+ayi}{(cx+d)+cyi}$

$= \frac{(ax+b+ayi) \cdot (cx+d-cyi)}{(cx+d)^2 + c^2y^2} = \frac{A}{(\text{同左})} + \frac{Bi}{(\text{同左})}$

$$\text{期 } B = a(cx+d)y - cy(ax+b) = (ad-bc)y$$

$$\text{Im} w = \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2 + c^2y^2} > 0. \quad \text{而 } y > 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\therefore ad-bc > 0.$$

此情况下 实轴 $\rightarrow$ 实轴 (且应为正向 $\rightarrow$ 正向).

因 $w = u + iv$ $z = x + iy$ 当 $z \in \mathbb{R}$ 时 $w = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{R}$.

$$w, z \in \mathbb{R} \text{ 时 } \frac{du}{dx} = \frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} > 0 \quad \text{故正向映射.}$$

($v=y=0$)

而当 $ad-bc < 0$ 时 $\text{Im} z > 0 \rightarrow \text{Im} w < 0$.

实轴 $\rightarrow$ 实轴 (正向 $\rightarrow$ 反向).

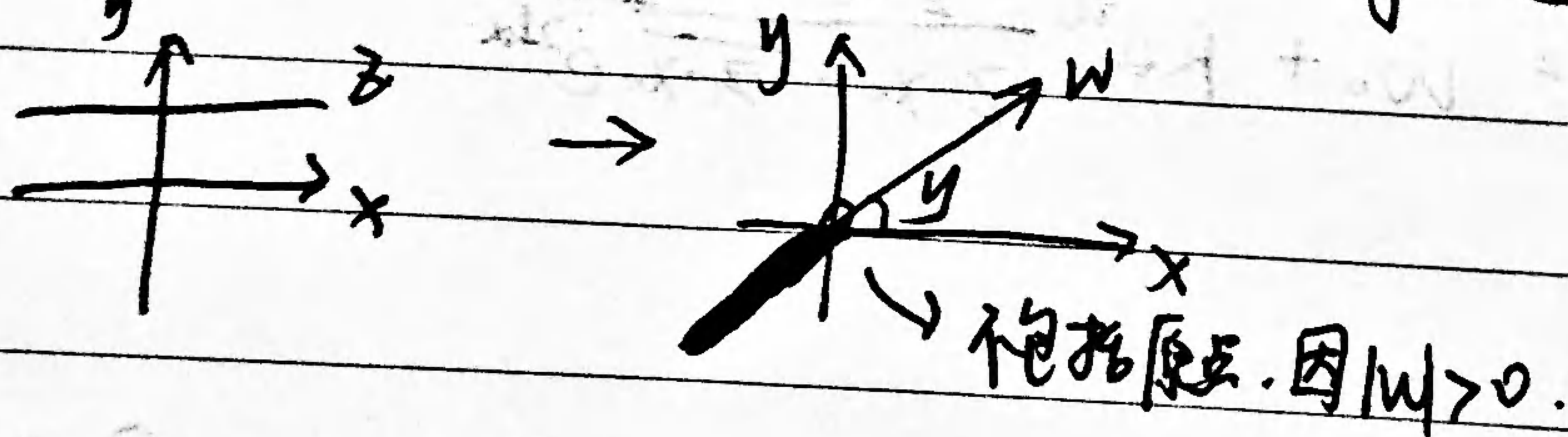
? 左手法则.

介绍一个非分式线性映射. 指数函数的映射. $w = e^z$.

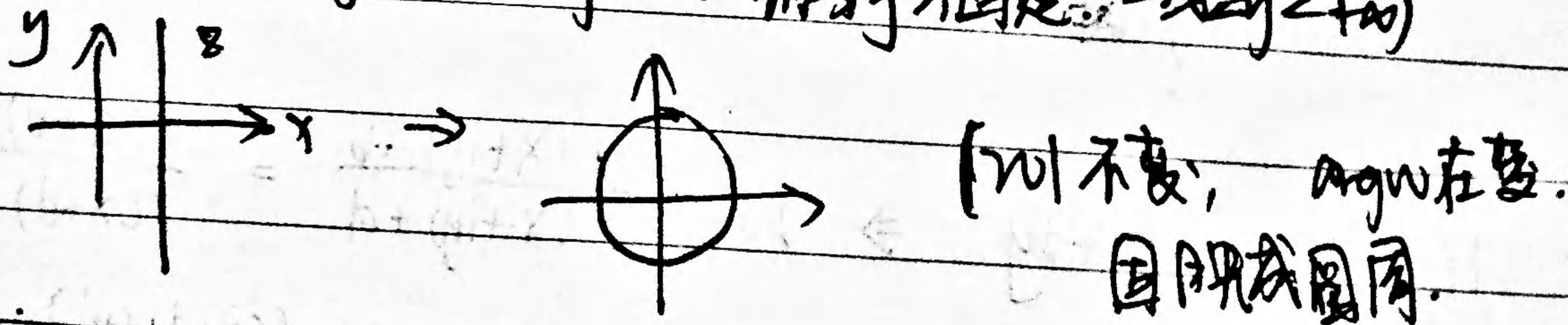
$$w = e^z = e^{x+iy} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

当 z 为平行于 x 轴直线时. (相当于 y 固定, $-\infty < x < +\infty$)

$$w = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow |w| = e^x > 0 \quad \arg w = y$$



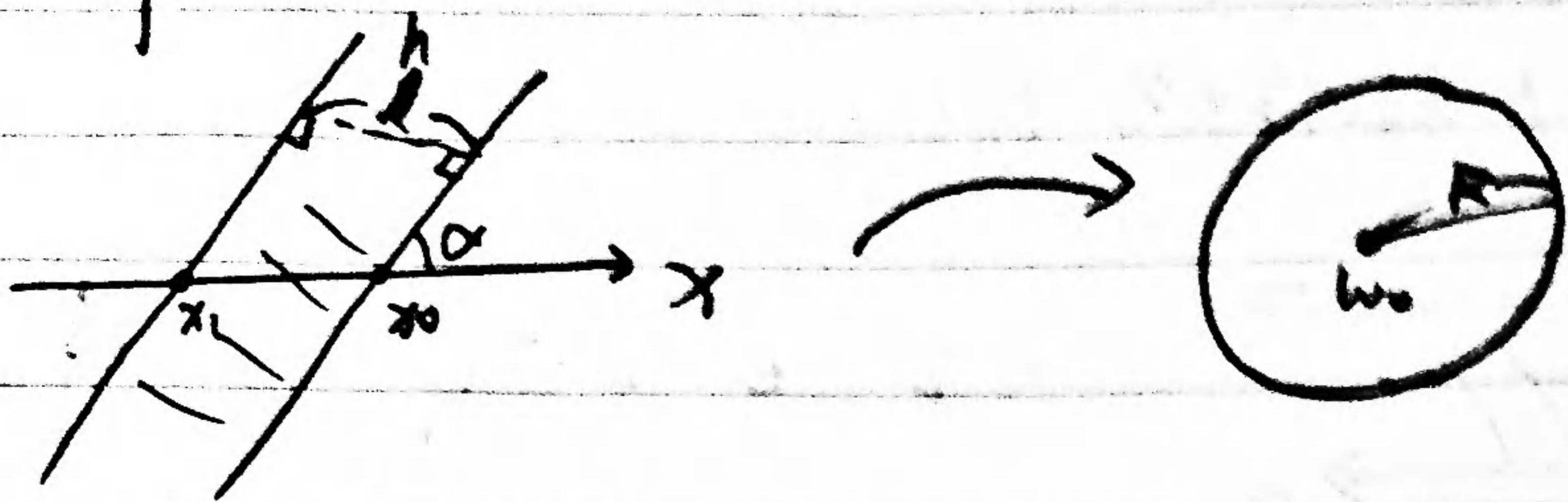
当 z 为平行于 y 轴直线时. (相当于 x 固定, $-\infty < y < +\infty$)



Date 28

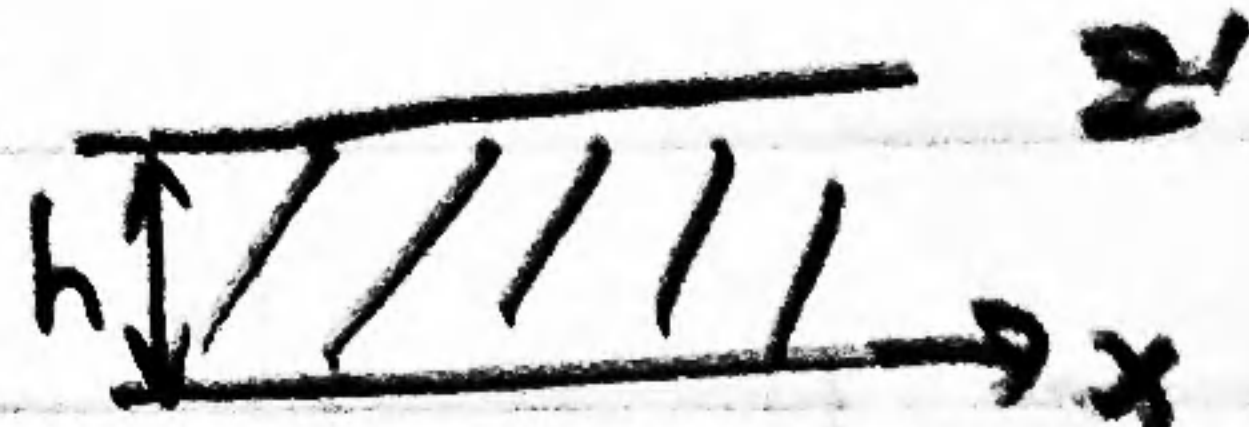
★ Good Ways!

例: 求映射



解: 先将其化为标准长条 (平行于 x 轴) ~~让 z = x0 + \rho e^{i\alpha} \rightarrow z' = 0 \ (x \in \mathbb{R})~~

$$z' = (z - x_0) e^{-i\alpha}$$



$$h = |x_0 - x_1| \sin \alpha$$

再将该长条展宽为 π .



$$z'' = z' \cdot \frac{\pi}{h} = \frac{(z - x_0) e^{-i\alpha} \pi}{|x_0 - x_1| \sin \alpha}$$

这样 $z'' \rightarrow \frac{z}{e^{z''}} = e^{z''}$
 就是将 $0 < \text{Im } z'' < \pi$
 映射到 $\text{Im } z > 0$

$$\frac{w - w_0}{R} = w' = \frac{(z - x_0) e^{-i\alpha} \pi}{|x_0 - x_1| \sin \alpha} = \frac{e^{z''} - i}{e^{z''} + i}$$

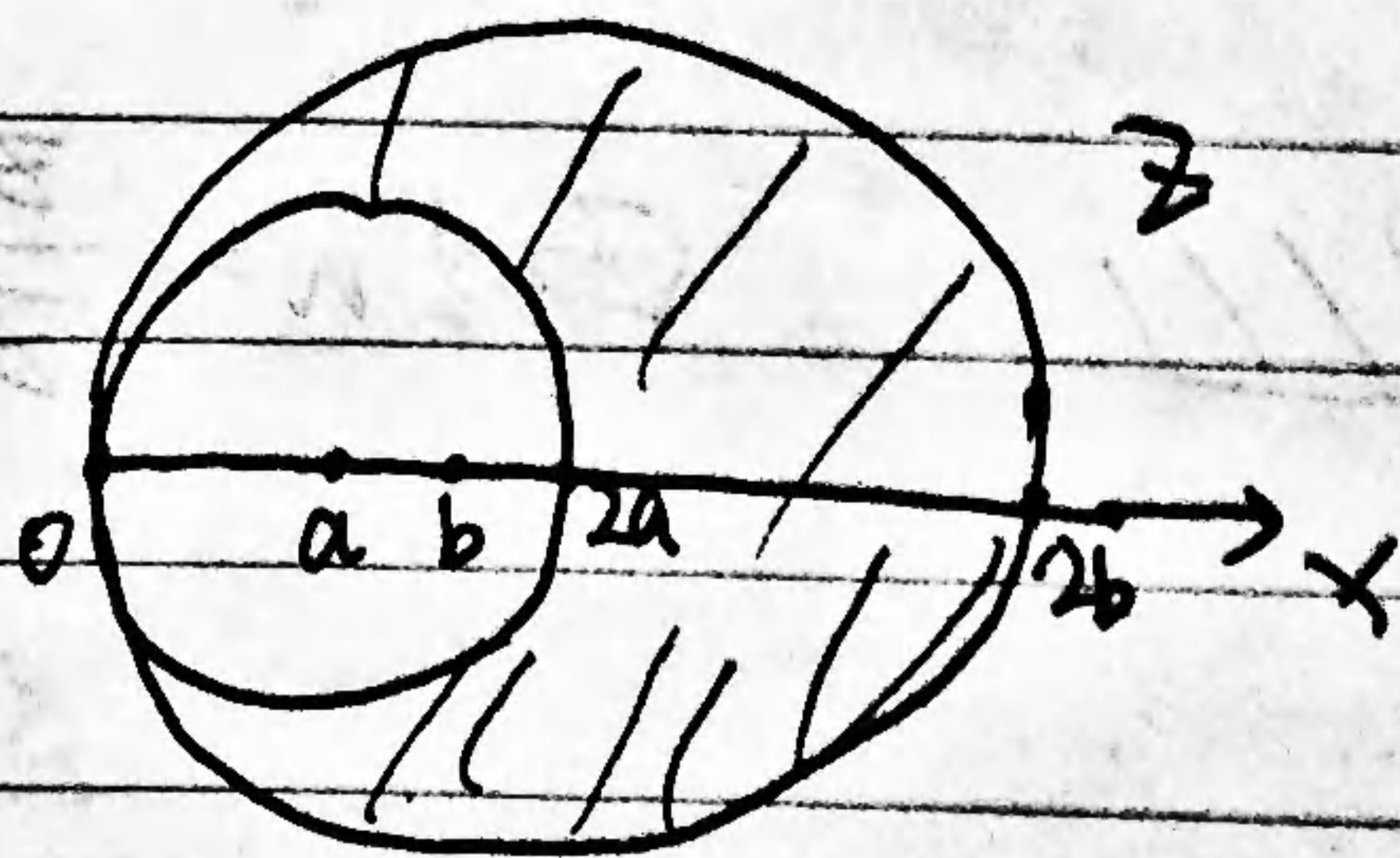
($w' = \frac{z+i}{z-i}$ 是将 $\text{Im } z > 0$

映到 $|w| < 1$ 的众多映射中的一个.)

这里我们只要找到一个满足条件的某一个即可)

例: 求将 $|z - a| > a$ 与 $|z - b| < b$ 之间的部分.

映射成单位圆盘. 这里 $0 < a < b$.

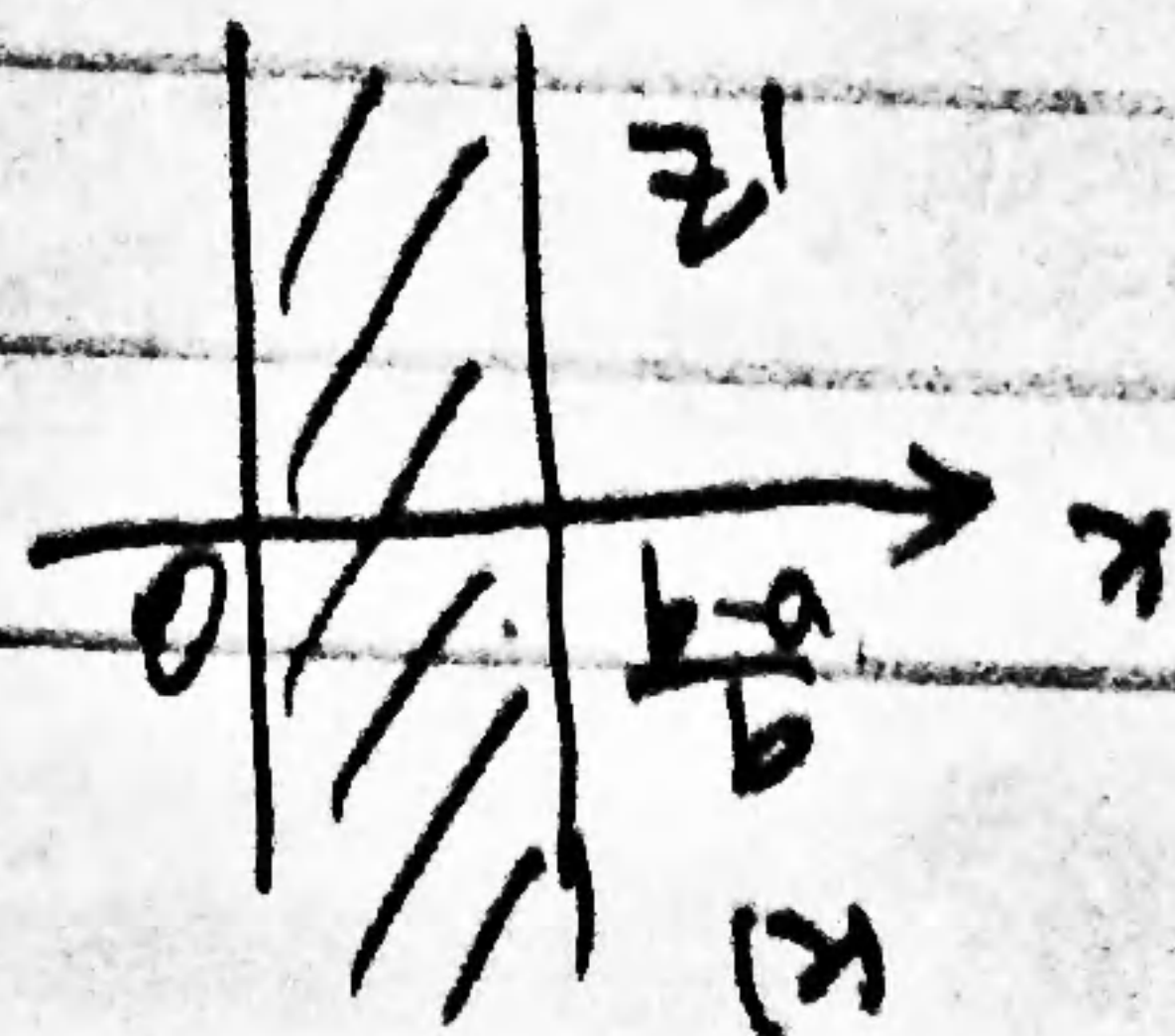


(1)

Good Why!

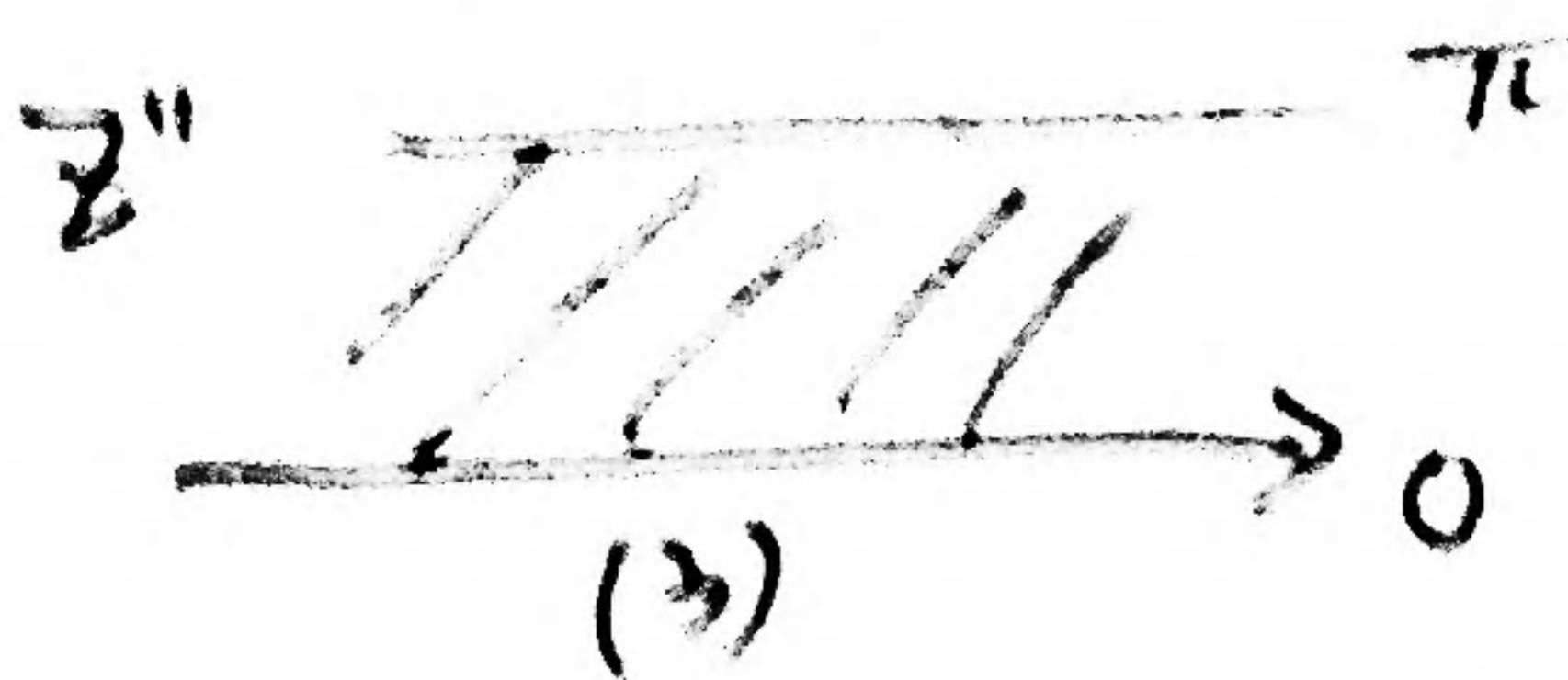
$$z' = \frac{z - a}{b - a}$$

则上述映射将图 (1) 映成 (2)



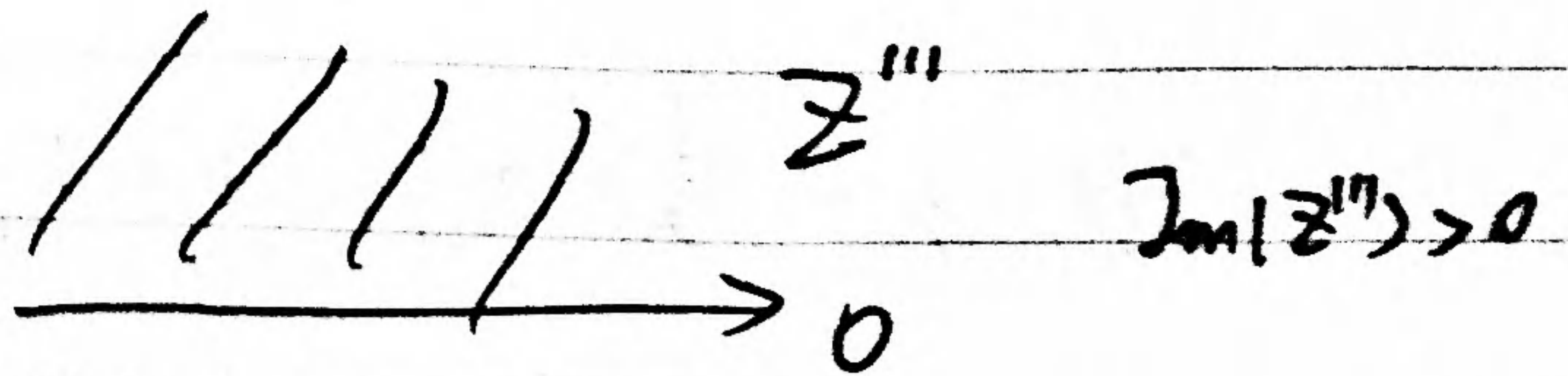
(用 $z=0$ 时 $z' = -a/(b-a)$ 故 2 个圆映为 3 直线.
 这里只需确定 2 点即可找到直线)

由例(1)可知标准形为 (2)



$$z'' = e^{\frac{\pi}{2}i} z' \cdot \frac{\pi}{\frac{b-a}{b}} = \frac{b\pi i}{b-a} \cdot \frac{z-2a}{z}$$

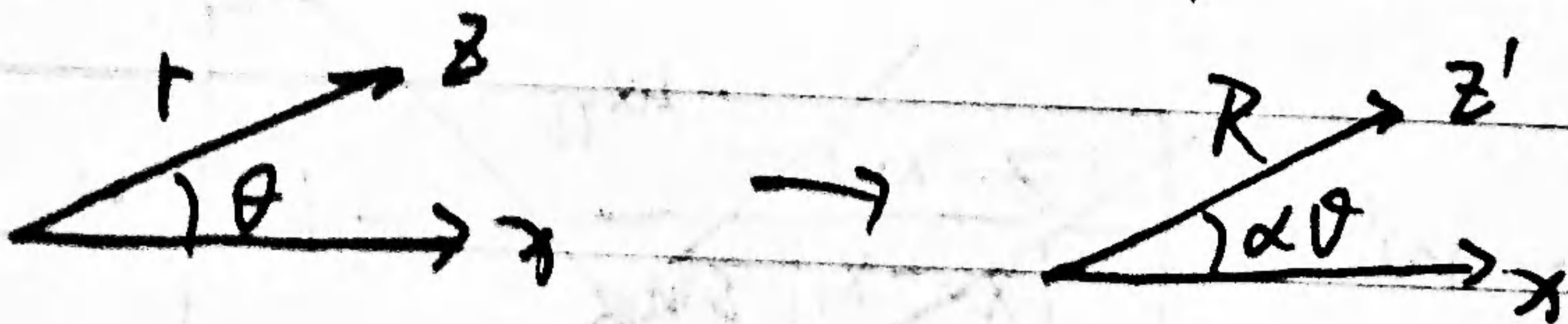
$$z''' = e^{\beta''} = e^{\frac{a\pi i}{b-a} \cdot \frac{z-2a}{z}}$$



$$w = \frac{z''' - i}{z''' + i} = \text{代入即可.}$$

幂函数 $w = z^\alpha$ ($\alpha > 1$ 且 $\alpha \in \mathbb{N}^*$)

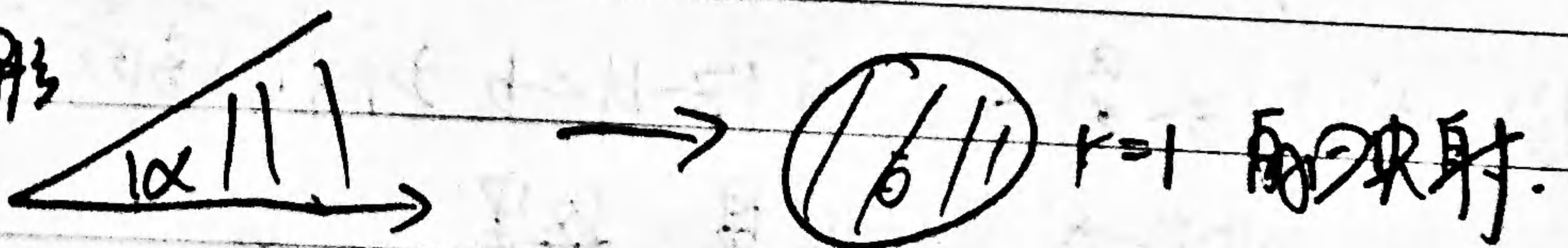
设 $\alpha > 1$ 令 $w = z^\alpha$ $z = re^{i\theta}$ 时 $w = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = Re^{i\varphi}$
 $\Rightarrow R = r^\alpha > 0$ $\varphi = \alpha\theta > \theta$ $\theta \in [0, 2\pi)$



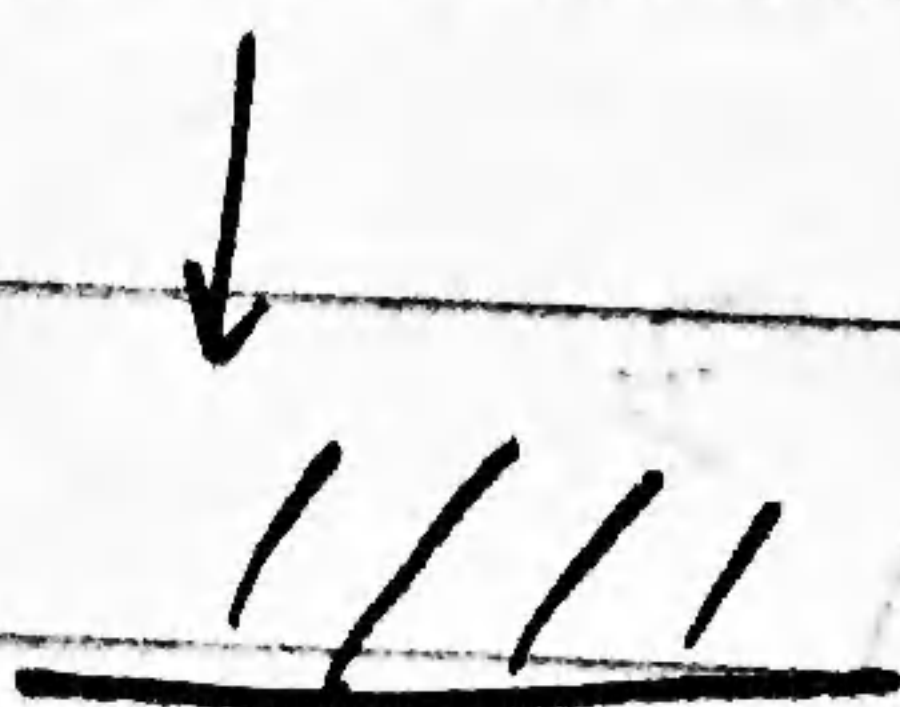
$$w'(z) = \alpha z^{\alpha-1} \Rightarrow w'(0) = 0 \quad (\text{当 } 0 < \alpha < 1 \text{ 时, } w'(0) = \infty)$$

$\Rightarrow w = z^\alpha$ 在原点有可能不保角. (确实)

例1. 标准扇形



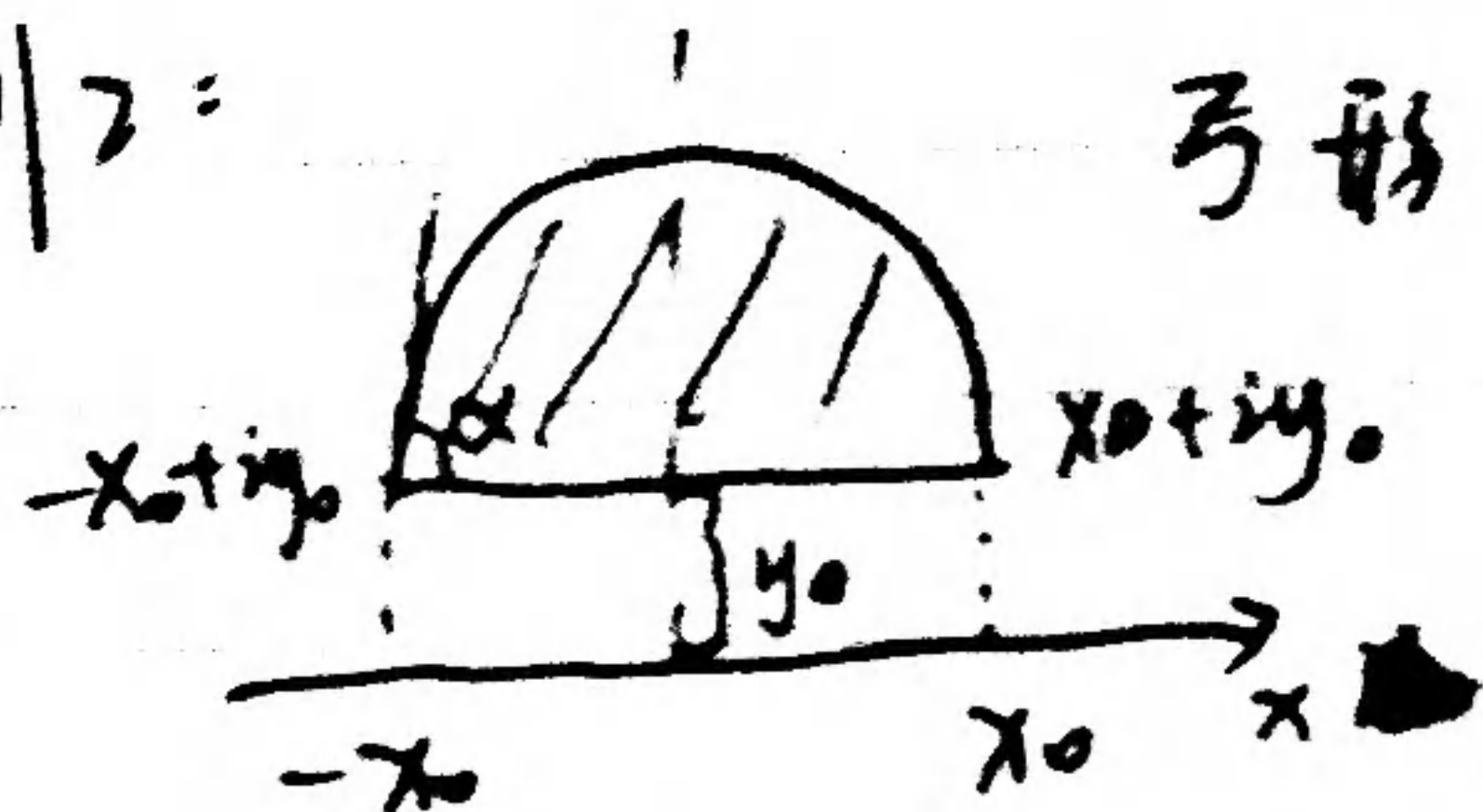
解: 令 $z' = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$



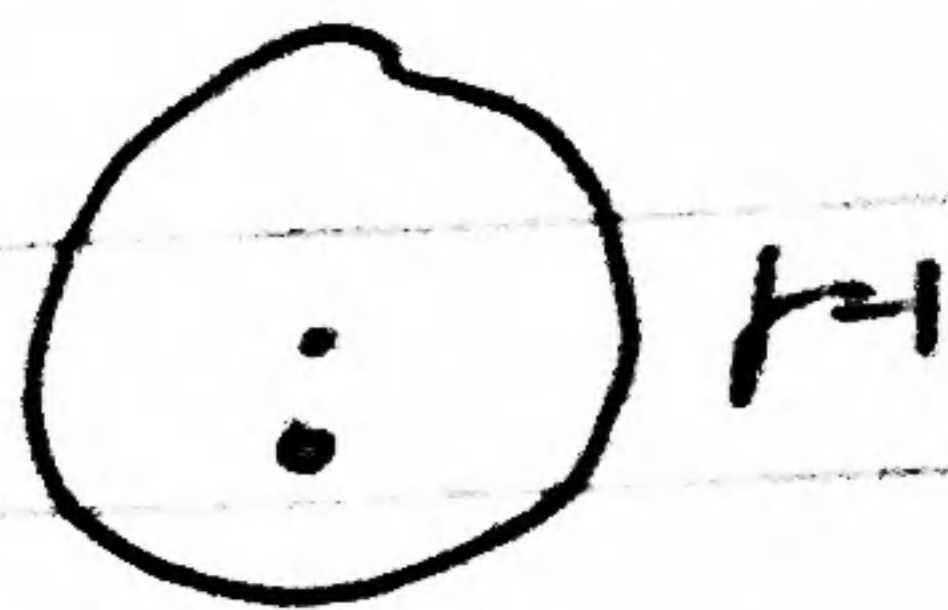
$$\text{再令 } w = \frac{z' - i}{z' + i} = \frac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - i}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} + i}$$

Date 29

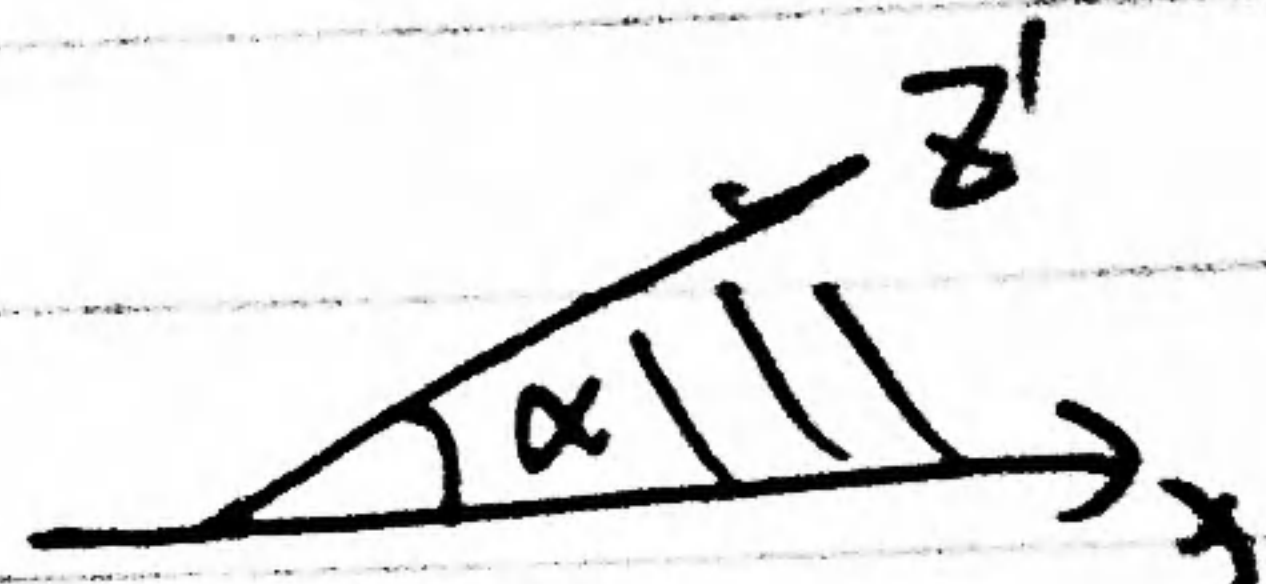
例 2:



$\omega \rightarrow$



$$z' = (-1) \frac{z + x_0 - iy_0}{z - x_0 - iy_0}$$



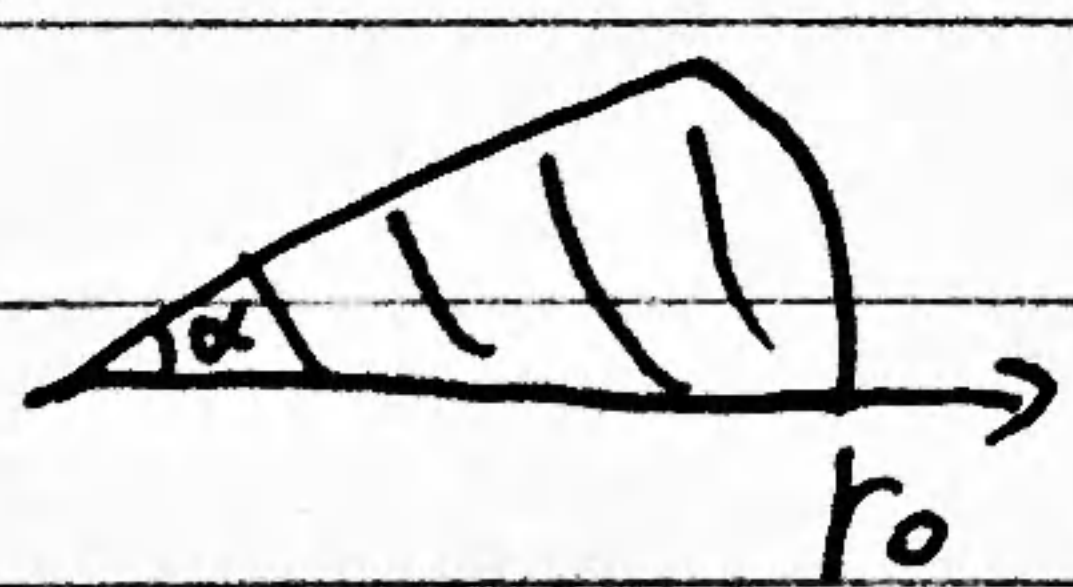
$$z = 0 + iy_0 = iy_0$$

$$\Rightarrow z' = \frac{(-1) \cdot (iy_0 + x_0 - iy_0)}{-iy_0 - x_0 - iy_0}$$

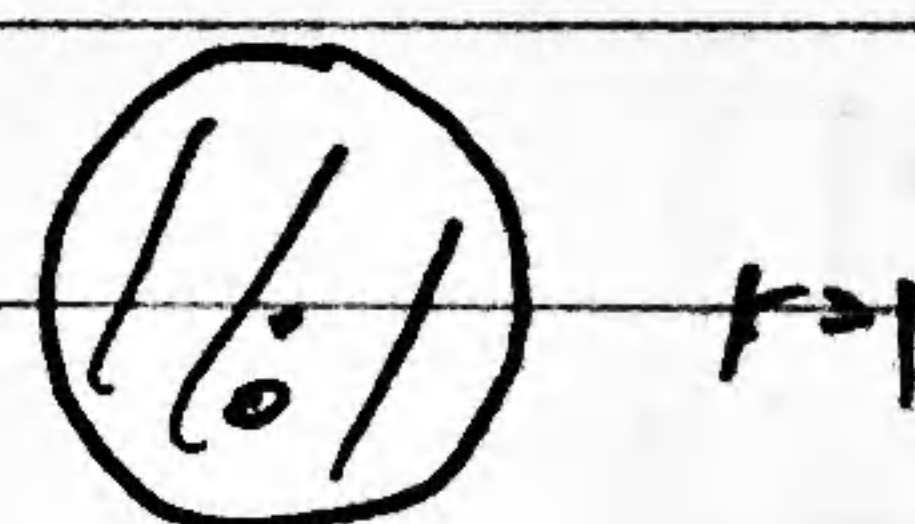


$$z'' = z' \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = \frac{z'' - i}{z'' + i} \quad \downarrow \text{代入}$$

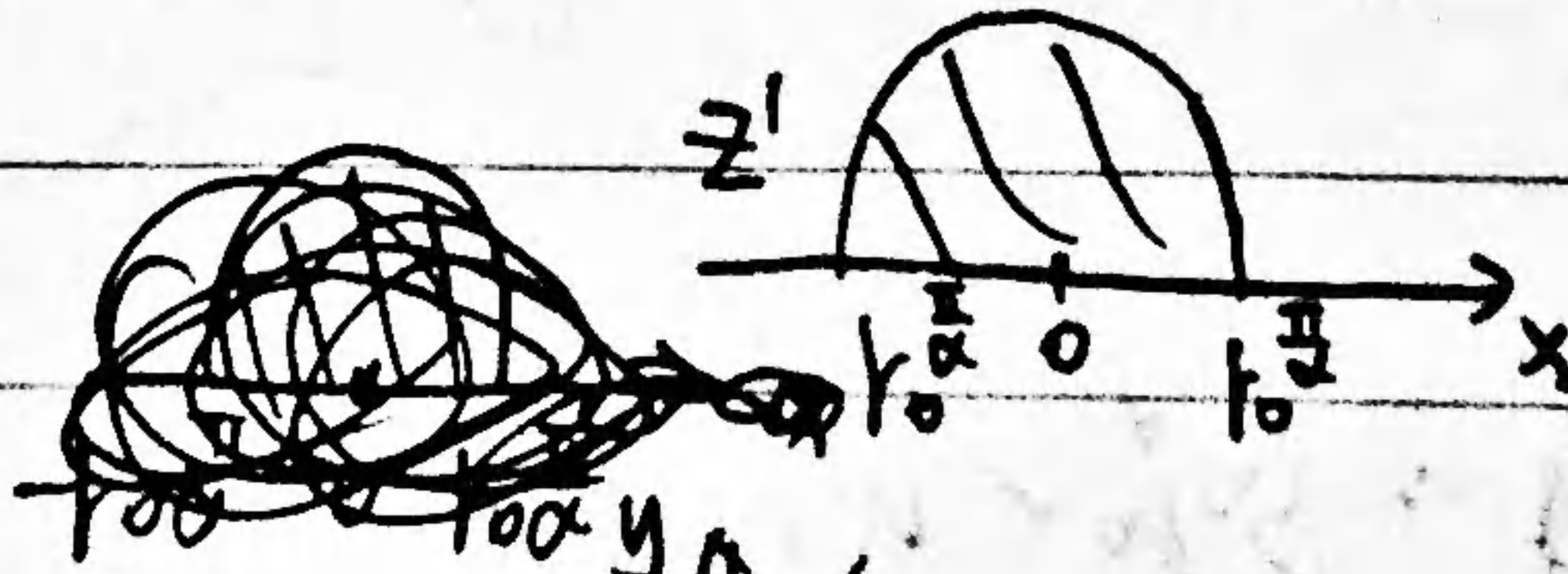
例 3:



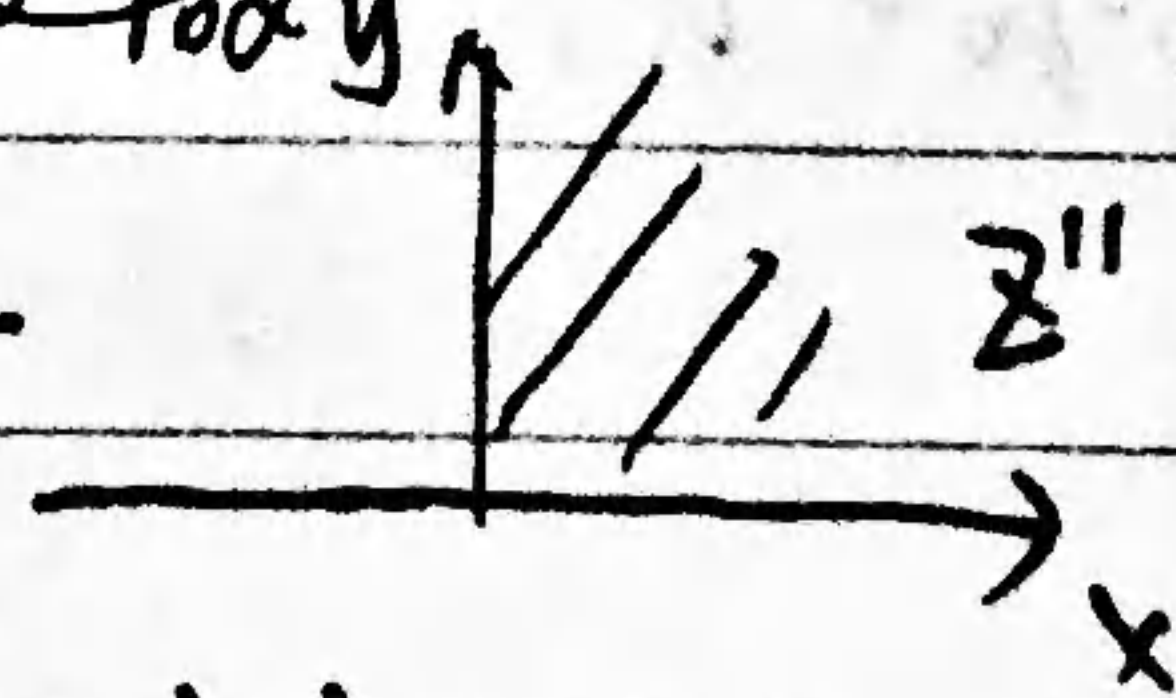
$\rightarrow$



$$z' = z \frac{\pi}{2}$$

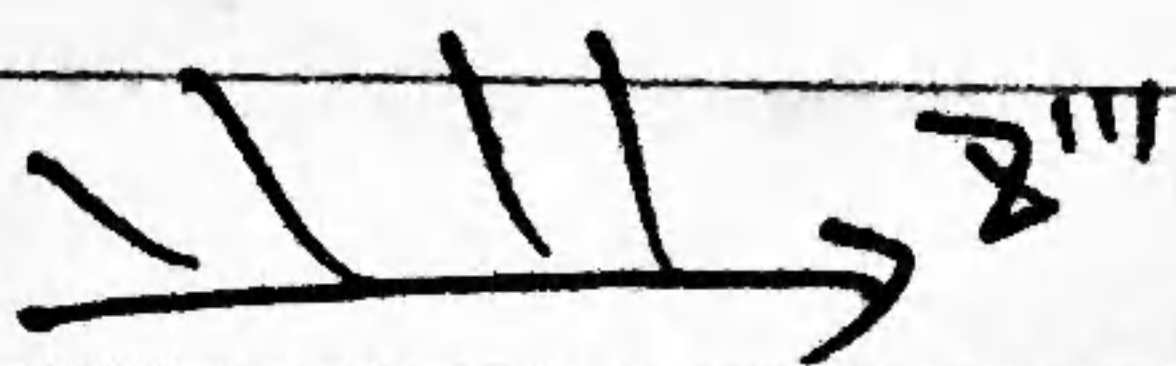


$$z'' = (-1) \frac{z' + r_0 \frac{\pi}{2}}{z' - r_0 \frac{\pi}{2}}$$

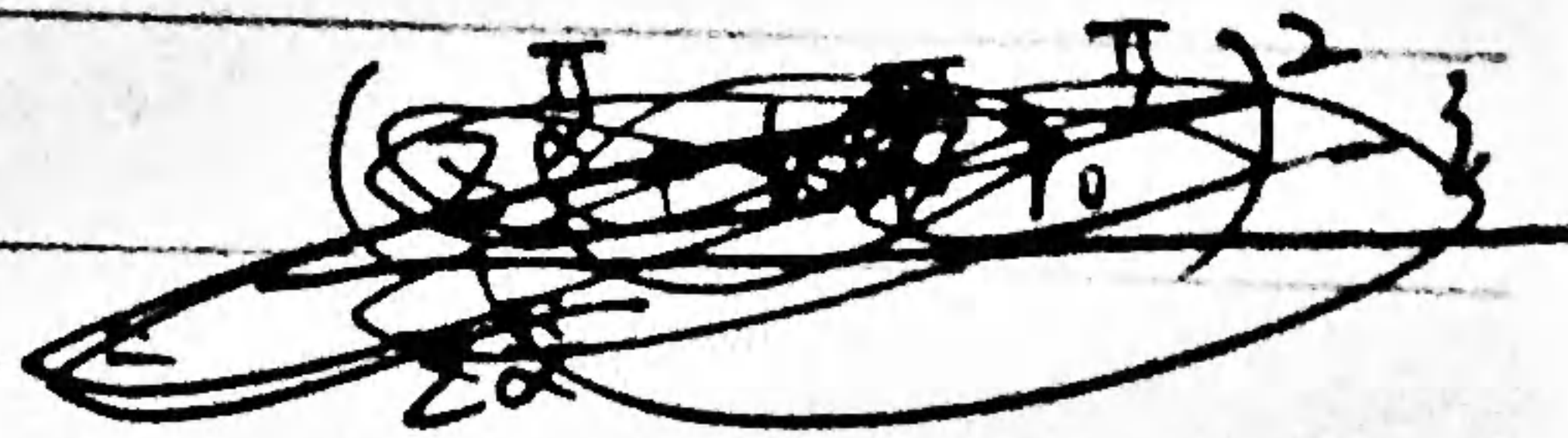


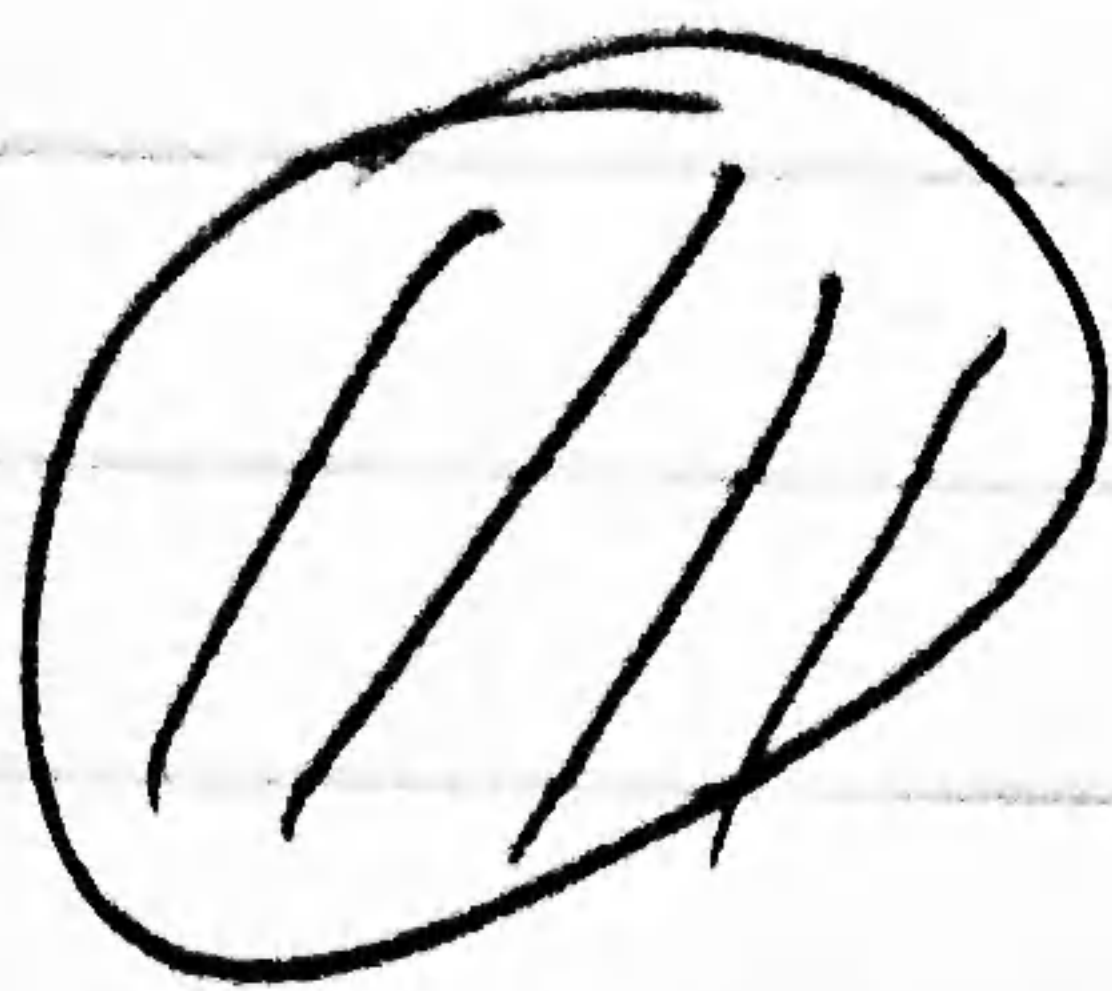
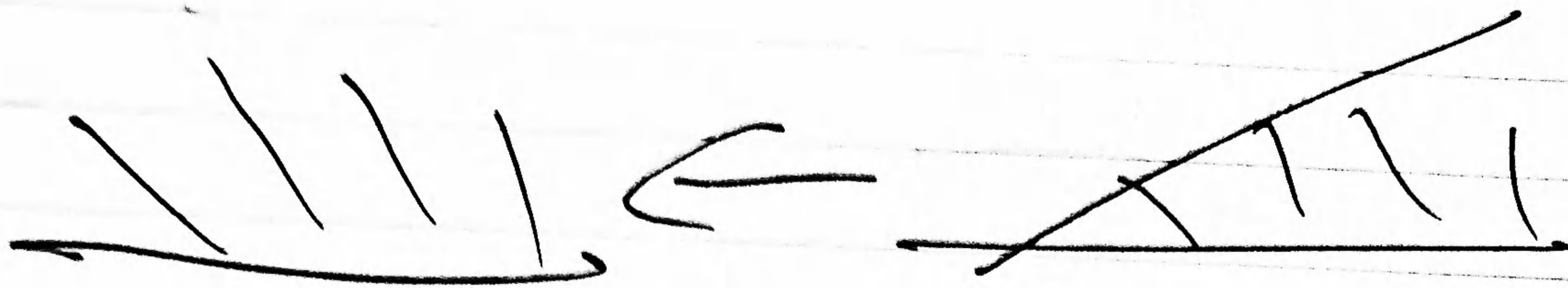
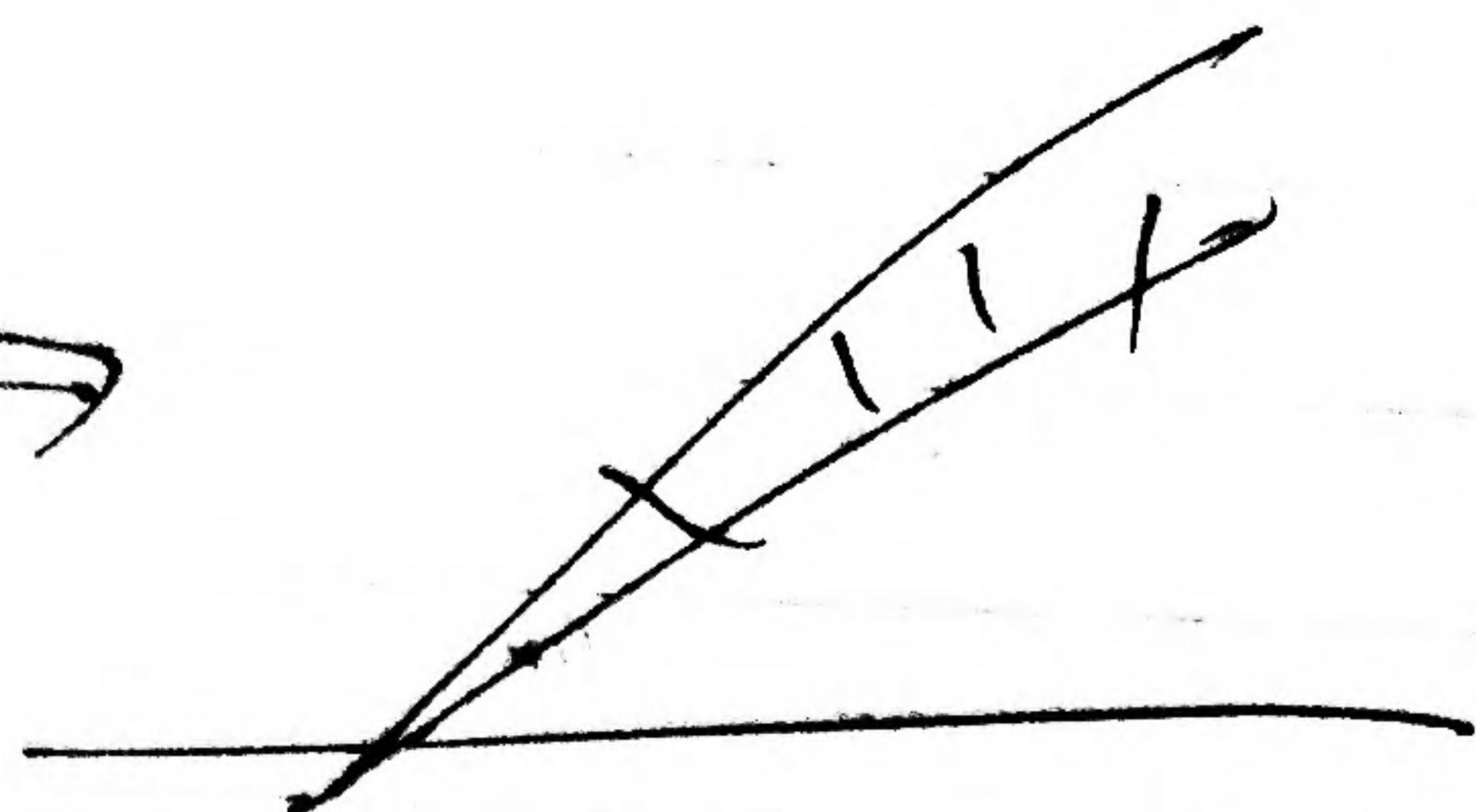
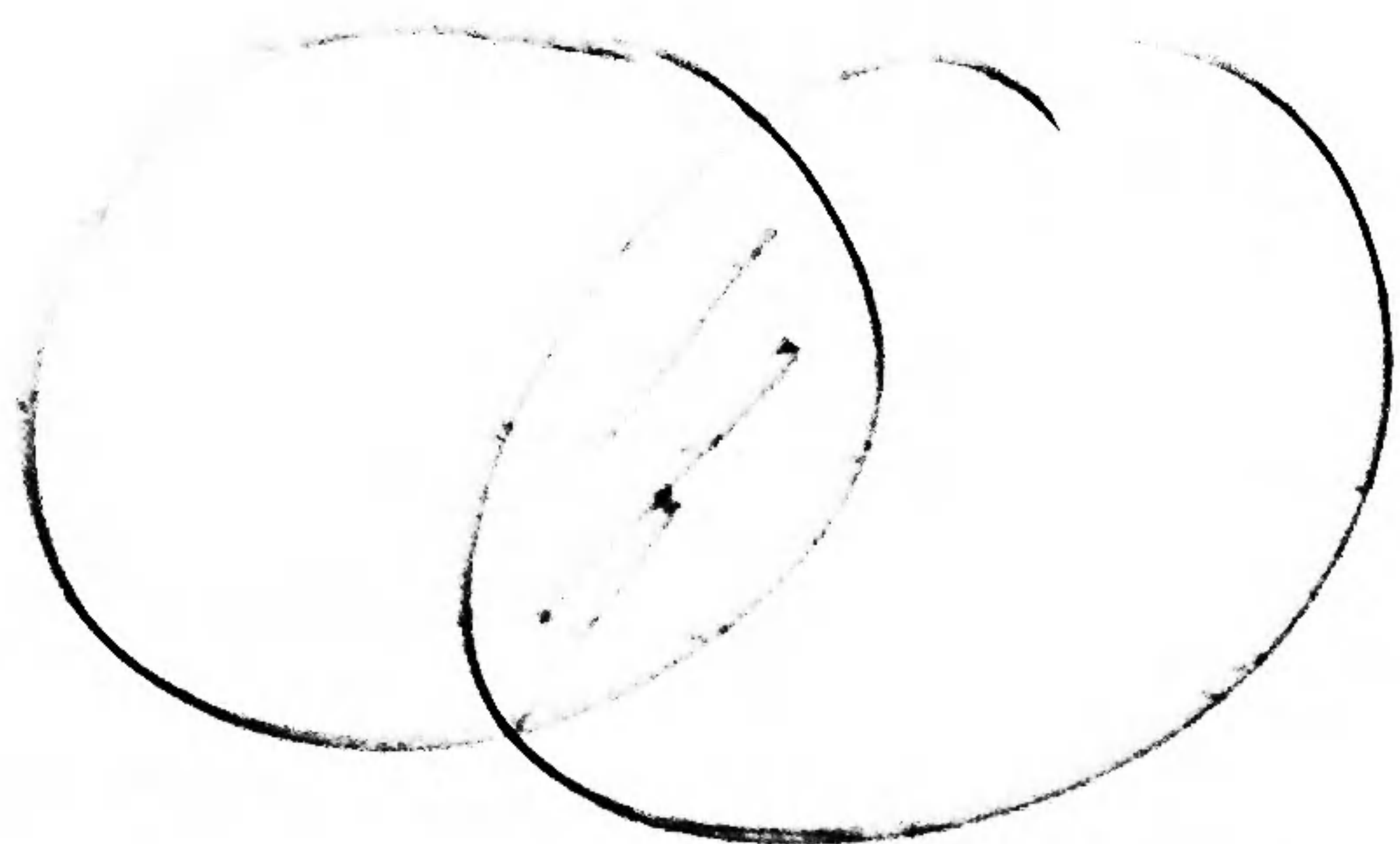
$$\frac{\left(\frac{z' + r_0 \frac{\pi}{2}}{z' - r_0 \frac{\pi}{2}} \right)^2 - i}{\left(\frac{z' + r_0 \frac{\pi}{2}}{z' - r_0 \frac{\pi}{2}} \right)^2 + i}$$

$$z''' = (z'')^2$$



$$w = \frac{z''' - i}{z''' + i} = \frac{\left(\frac{z' + r_0 \frac{\pi}{2}}{z' - r_0 \frac{\pi}{2}} \right)^2 - i}{\left(\frac{z' + r_0 \frac{\pi}{2}}{z' - r_0 \frac{\pi}{2}} \right)^2 + i}$$





面积比例. 五. 六. 章: 50% - 60%