

1. 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个相异的点且不共线. 用 z_1, z_2, z_3 表示出 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的外接圆圆心, 并证明: 若 $z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ 是 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的正 $\triangle$ 且求出外接圆的半径 r (10分).

2. 用不同于(充分性条件与必要性)的方法证明: $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ 构成(圆内接)正 n 多边形
的 n 个顶点的充要条件是 $f_n(z) = z^n + C_n$ (这里 $|z_k| = r > 0, k=1, \dots, n$). (10分)

3. 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上四个相异的点, 定义其交比 $\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle$ 为

$$\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad \left(= \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \right) \quad \text{利用直线 } L: z = z_0 + t\alpha, \alpha \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

z_1, z_2, z_3 共线或共圆的充要条件是 $\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle \in \mathbb{R}$.

(并给出共线... 的条件). 由此得到 n 个 ($n \geq 4$) 个相异的点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ (其中任意三个点不共线) 共圆的充要条件 (20分).

而 z_k 方程及 Ch. 5.2.3.24 的坐标方程方法证明:

4/ $D_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 是复平面上 n 个相异点构成的点集, 并满足 $|z_k| = r > 0$
 $k=1, 2, \dots, n$.
 令 $f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} z + (-1)^n a_n$. 证明: 当 $n \geq 3$ 时 D_n 构成
 正 n 边形的充要条件是 $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$. $m = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ 奇} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 偶} \end{cases}$
 并证明 m 不能被更小的正整数所代替 (sharp) (20分)

$\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ 利用直线 $l: z = z_0 + t\alpha, \alpha \neq 0, t \in \mathbb{R}$.
 证明 z_1, z_2, z_3 共线或共圆的充要条件是 $\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle \in \mathbb{R}$. 圆用 $C: z = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi), r > 0$.
 (并具体给出共线...的条件) 由此得到 n 个 ($n \geq 4$) 个相异的点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ (其中任意 3 个是不共线) 共圆的充要条件
 (20分)

4/ $D_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 是复平面上 n 个相异点构成的点集, 其中 $z_k = r_k e^{i\theta_k}, k=1, 2, \dots, n$
 令 $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1} z + (-1)^n c_n$. 证明: 当 $n \geq 3$ 时 D_n 构成
 正 n 边形的充要条件是 $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$. $m = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ 奇} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 偶} \end{cases}$
 并证明 m 不能被更小的正整数所代替 (sharp) (20分)

5/ $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_{n-1} z + c_n, (n \geq 3)$. 给出 D_n 构成某一个正 n 边形的充要条件并予以证明. 同时求出外接圆圆心及半径 $r(0)$ 来. (10分)

5/ $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_{n-1} z + z_n$ ($n \geq 3$) 给出 D_n 构成某一个正 n 多
 边形 n 个顶点的充要条件并给出证明. 同时求出外接圆半径及半径 $r > 0$ 集. (10分)

6/ 利用 $\sin z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ 证: $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}\right)$

证: (1) $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} - \frac{\zeta(2n-2)}{3! \pi^{2n-2}} + \frac{\zeta(2n-4)}{5! \pi^{2n-4}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \zeta(2)}{(2n-1)! \pi^2} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0, n \geq 2$ $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

4/ $D_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 是复平面上 n 个相异点构成的点集 并满足 $|z_k| = r > 0$ $k=1, 2, \dots, n$

令 $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1} z + (-1)^n c_n$ 证: 当 $n \geq 3$ 时 D_n 构成

正 n 边形的充要条件是 $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$

$$4(2) \quad \frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}} \zeta(2n) - \frac{2^{2n-2}-1}{2! \pi^{2n-2}} \zeta(2n-2) + \frac{2^{2n-4}-1}{4! \pi^{2n-4}} \zeta(2n-4) + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2^2-1) \zeta(2)}{(2n-2)! \pi^2} + \frac{(-1)^n}{2(2n-1)!} = 0 \quad (10 \text{分})$$

$n=2, 3, \dots$

$$(3) \quad \text{令 } a_n = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{证: } (n+\frac{1}{2})a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} a_k, \quad n \geq 2. \quad (a_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6})$$

并求 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 的表达式. (10分)

$$7. \quad \text{证: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = \ln \frac{2\pi}{e}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^n} = \ln \frac{\pi}{e} \quad (10 \text{分})$$

证: $k=1, 2, \dots$
 由 $n \leq 3$ 与 $n \geq 3$ 条件并给于证法 同时式子

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi^{2n}} \zeta(2n) = \frac{2! \pi^{2n-2}}{1} \zeta(2) = \frac{4! \pi^{2n-4}}{1} \zeta(4) = \dots = \frac{n-1}{n} a_{n-1} a_n, n \geq 2. \quad (a_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}) \\
 & (3) \text{ 令 } a_n = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}, n=1, 2, \dots \text{ 证: } (n+\frac{1}{2})a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} a_k, n \geq 2. \\
 & \text{并求出 } a_1, a_2, \dots, a_6 \text{ 的表达式. (10分)} \\
 & 7/ \text{ 证: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = \ln \frac{2\pi}{e}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^n} = \ln \frac{\pi}{e} \quad (10分)
 \end{aligned}$$

8/ 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内处处可导且在 $|z| \leq 1$ 内连续. 若 $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$

证: $f(z) = f(\bar{z}) \in \mathbb{R}, \forall z: |z| \leq 1$ (10分)

9/ 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内处处可导, 且 $f(z)$ 不是常数. 若 $|f(z)| = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$ 证: $\forall |z_0| = 1$
 $\neq f'(z_0) \neq 0$. (10分)

8/ 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内处处可导且在 $|z| \leq 1$ 内连续. 若 $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R} \quad \theta \in [0, 2\pi)$
 证: $f(z) \equiv f(0) \in \mathbb{R} \quad \forall z: |z| \leq 1$ (10分)
 9/ 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内处处可导. 且 $f(z)$ 不是常数. 若 $|f(z)| = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$ 证: $\forall |z| = 1$
 $\neq f'(z) = 0$ (10分)
 10/ (利用) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), |z| < 1$ 令 $f_k(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n^k}, g_k(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n^k}$ (10分)
 求 $r \in (0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$ 给出 $k=1, 2, 3$ 时 $f_k(r, \theta)$ 及 $g_k(r, \theta)$ 的积分或有限级数.

8/ 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内处处不为 0 且在 $|z| \leq 1$ 内连续. 若 $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R} \quad \theta \in [0, 2\pi]$
 证: $f(z) \equiv f(0) \in \mathbb{R} \quad \forall z: |z| \leq 1$ (10分)

9/ 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内处处不为 0 且 $f(z)$ 不是常数. 若 $|f(z)| = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$ 证: $f(z) \equiv \frac{1}{f(0)}$ (10分)

10/ (利用 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$) $|z| < 1$ 令 $f_k(r, \theta) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(r, \theta) = f(r, \theta)$ (10分)

再令 $r \rightarrow 1^-$ 求出 $f_n(1, \theta)$ 及 $g_n(1, \theta)$ 的积分及有限形式的最简形式. (10分)

11/ 求 $\oint_{\Gamma} \frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)^n} dz$ (这里 $r \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$ (正整数)) (10分)

12/ 设 $\Delta_{\bar{z}_1, \bar{z}_2}$ 的面积 $S, |z| = R > |r|$

证: $S = \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma} (\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 \bar{z}_3) dz \right|$ (这里 $\int_{\Gamma} \bar{z} dz = 0$, 若 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$) (10分)

再令 $r \rightarrow 1^-$ 求出 $f_n(1,0)$ 及 $g_n(1,0)$ 的积分及有限形式的表达式

11. 求 $\int_{\gamma} \frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)^n} dz$ (这里 $r \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$ (正整数))

12. 设 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的面积为 S , $|z_1| = R > |z_2|$

求 $S = \frac{1}{2} \left| \sum_{m=1}^3 (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) \right|$ (这里 $\operatorname{Im}(z) = y$, 若 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$)

13. 设 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 构成正 $\triangle$ 的充要条件是 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ (10分)

14/ $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + r^{2n}} dx$. $r > 0$, m 是非负整数, $n \in \mathbb{N}$, 且 $m \leq n-1$. (10分)

15/ $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2 + r^2)^n} dx$. $r > 0$, $m \leq n-1$. (10分)

16/ $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1} \sin kx}{(x^2 + r_1^2)^n (x^2 + r_2^2)^n} dx$. $r_1 > 0, r_2 > 0, k > 0, m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m \leq 2n$. (10分)

17/ $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m} \cos kx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx$

17/ $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m} e^{-kx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} dx, \quad a>0, b>0, c>0, k>0. \quad m \text{ 为偶数或 } m \leq -1 \quad (10 \text{ 分})$

18/ $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad m \text{ 为偶数或 } n \in \mathbb{N}, a>0, b, c \in \mathbb{R} \text{ 且 } ac-b^2>0, m \leq n-1 \quad (10 \text{ 分})$

19/ $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n (x^2+b^2)^n} dx, \quad a>0, b>0, m \text{ 为偶数或 } n \in \mathbb{N} \text{ 且 } m \leq 2n-1 \quad (10 \text{ 分})$

14/ $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} dx, \quad r>0, m \leq n-1 \quad (10 \text{ 分})$

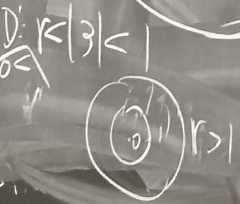
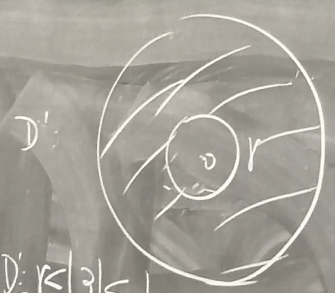
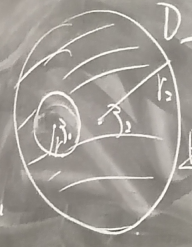
16/ $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1} \sin kx}{(x^2+r_1^2)^n (x^2+r_2^2)^n} dx, \quad r_1>0, r_2>0, k>0, m, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } m \leq 2n \quad (10 \text{ 分})$

17/ $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m+2n-1}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} dx, \quad a>0, b>0, c>0 \quad (10分)$

18/ $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(ax^2+bx+c)^n} dx \quad m \text{ 为偶数}, n \in \mathbb{N}, a>0, b, c \in \mathbb{R} \text{ 且 } ac-b^2>0, m \leq n-1 \quad (10分)$

19/ $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n (x^2+b^2)^n} dx, \quad a>0, b>0, m \text{ 为偶数}, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } m \leq 2n-1 \quad (10分)$

20/ (20分)
 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$
 $ad-bc \neq 0$



求出一个将开圆环域 D 映射成开圆环域 D' 的分式线性映射

3. $|z-z_1| > r_1, |z-z_1| < r_2$

或 $0 < |z_2-z_1| < r_2-r_1$

映射成开圆环域 D' 的分式线性映射

满足 $0 < |z| < 1$ 且 $b < r < 1$