

第四章作业 优秀作业

4.1

$$\begin{aligned}
 4.1 (1) \quad G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} &= F_{2n} - 3F_{2n-2} + F_{2n-4} \\
 &= F_{2n-1} + F_{2n-2} - 2F_{2n-2} - F_{2n-3} - F_{2n-4} + F_{2n-4} \\
 &= F_{2n-2} + F_{2n-3} - F_{2n-2} - F_{2n-3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad G(x) = G_0 + G_1x + G_2x^2 + \dots + G_nx^n + \dots \quad ①$$

$$3xG(x) = 3G_0x + 3G_1x^2 + \dots + 3G_{n-1}x^n + \dots \quad ②$$

$$x^2G(x) = G_0x^2 + \dots + G_{n-2}x^n + \dots \quad ③$$

$$① - ② + ③ \text{ 得 } (1-3x+x^2)G(x) = G_0 + (G_1-3G_0)x + (G_2-3G_1+G_0)x^2 + \dots + (G_n-3G_{n-1}+G_{n-2})x^n + \dots$$

$$(1-3x+x^2)G(x) = G_0 + (G_1-3G_0)x$$

$$\text{将 } G_0 = F_0 = 0, G_1 = F_2 = 1 \text{ 代入得 } G(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}$$

4.1. 设 $G_n = F_{2n}$ ($n \geq 0$), 其中 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数.

(1) 证明: $G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} = 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);

(2) 求数列 $\{G_n\}$ 的母函数.

$$(1) \quad G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2}$$

$$= F_{2n} - 3F_{2n-2} + F_{2n-4}$$

$$= F_{2n-1} + F_{2n-2} - 3F_{2n-2} + F_{2n-4}$$

$$= F_{2n-2} + F_{2n-3} + F_{2n-2} - 3F_{2n-2} + F_{2n-4}$$

$$= F_{2n-3} + F_{2n-4} - F_{2n-2}$$

$$= 0$$

$$(2) \quad [X^n]G(x) - [X^n](3xG(x)) + [X^n](x^2G(x)) = 0$$

$$G(x) = F_0 + F_2x + F_4x^2 + \dots$$

$$3xG(x) = 3F_0x + 3F_2x^2 + \dots$$

$$x^2G(x) = F_0x^2 + \dots$$

$$(1-3x+x^2)G(x) = F_0 + (F_2-3F_0)x = x$$

$$G(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}$$

4.2

$$4.2 \quad a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

$$G(x) = a_0 + a_1x + \dots, \quad G(x) = \frac{1}{1-x+x^2} \Rightarrow a_0 = G(0) = \frac{1}{1-0+0} = 1$$

$$G'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots, \quad G'(x) = \frac{1-2x}{(1-x+x^2)^2} \Rightarrow a_1 = G'(0) = 1$$

4.2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $\frac{1}{1-x+x^2}$, 求 $\{a_n\}$ 满足的二阶齐次线性常系数递推式, 并求 a_0, a_1 .

$$\begin{array}{lcl}
 G(x) = \frac{1}{1-x+x^2} & | & G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\
 (1-x+x^2)G(x) = 1 & | & xG(x) = a_0x + a_1x^2 + \dots \\
 [x^n]G(x) - [x^{n-1}]G(x) + [x^{n-2}]G(x) = 0 & | & x^2G(x) = a_0x^2 + \dots \\
 a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0 & | & (1-x+x^2)G(x) = a_0 + (a_1-a_0)x = 1 \\
 \text{递推式 } a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2) & | & a_0 = 1, a_1 = 1
 \end{array}$$

4.3

4.3. 已知 $a_n = c \cdot 3^n + d \cdot (-1)^n$ ($n \geq 0$), 其中 c, d 是常数, 求 $\{a_n\}$ 满足的一个不含 c, d 的线性常系数递推关系.

解: 已知 $a_n = c \cdot 3^n + d \cdot (-1)^n$ ($n \geq 0$) ①

代入 a_{n-1} 有 $a_{n-1} = c \cdot 3^{n-1} + d \cdot (-1)^{n-1}$ ($n \geq 1$) ②

代入 a_{n-2} 有 $a_{n-2} = c \cdot 3^{n-2} + d \cdot (-1)^{n-2}$ ($n \geq 2$) ③

① - 3 × ② 得到 $a_n - 3a_{n-1} = d \cdot (-1)^n - 3d \cdot (-1)^{n-1} = 4d \cdot (-1)^n$ ($n \geq 1$)

① - 9 × ③ 得到 $a_n - 9a_{n-2} = d \cdot (-1)^n - 9d \cdot (-1)^{n-2} = -8d \cdot (-1)^n$ ($n \geq 2$)

则 a_n 满足 $a_n - 9a_{n-2} + 2(a_n - 3a_{n-1}) = 0$ ($n \geq 2$)

$3a_n - 6a_{n-1} - 9a_{n-2} = 0$ ($n \geq 2$)

$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$ ($n \geq 2$)

综上所述, $\{a_n\}$ 满足的线性常系数递推关系为 $a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$ ($n \geq 2$)

4.3 特征根为 3, -1, 则特征方程为 $C(x) = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$

$\{a_n\}$ 递推关系为 $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = c+d$, $a_1 = 3c-d$

4.4

4.4. 求解递推关系:

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 5 & (n \geq 2) \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

解: $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 5, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 8$

该式对 a_{n-1} 仍成立: $a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = 5$

两式相减得到 $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$

对应的特征多项式 $C(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ 有一个三重根 $\alpha = 1$

则 $a_n = A_1 \cdot 1^3 + C(n+1, n) \cdot A_2 \cdot 1^3 + C(n+2, n) \cdot A_3 \cdot 1^3$

$$= A_1 + (n+1)A_2 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)A_3$$

$$\text{代入初值有 } \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 2 \\ A_1 + 3A_2 + 6A_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 5 \\ A_2 = -9 \\ A_3 = 5 \end{cases}$$

$$a_n = 5 - 9(n+1) + 5 \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$$

综上所述, 由递推关系解得 $a_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$

$$4.4 \quad \begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 1^n \cdot 5 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

特解 $1^n \cdot k \cdot n^m$, 其中 1 是特征方程的 m 重根.

特征方程 $C(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, 其中 1 为重根.

因此解的形式为 $a_n = 1^n (A + Bn + k \cdot n^2) = A + Bn + k \cdot n^2$

$$a_0 = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$a_2 = 5 + 2a_1 - a_0 = 8$$

4.5

题目 4.5. 由 A, B, C, D 四个字母组成允许重复的 n 位字符串, 其中子串 AB 至少出现一次, 求满足要求的字符串数目.

解. 令 a_n 表示满足要求的字符串数目. 分析子串 AB 的位置: 若其在前 $n-1$ 位中已经出现, 而最后一位可以任取 A, B, C, D , 这类串的数目为 $4a_{n-1}$; 若其未在前 $n-1$ 位中出现, 即最后 2 位为 AB , 且前 $n-2$ 位没有出现子串 AB , 这类串的数目为 $4^{n-2} - a_{n-2}$. 综上, $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} + 4^{n-2}$ ($n \geq 3$), 且 $a_1 = 0, a_2 = 1$. 由递推公式可定义 $a_0 = 0$.

特征方程为 $r^2 - 4r + 1 = 0$, 其根为 $r_1 = 2 + \sqrt{3}, r_2 = 2 - \sqrt{3}$. 设 $a_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n + C4^n$. 代入初始条件

$$a_0 = A + B + C = 0$$

$$a_1 = (2 + \sqrt{3})A + (2 - \sqrt{3})B + 4C = 0$$

$$a_2 = (7 + 4\sqrt{3})A + (7 - 4\sqrt{3})B + 16C = 1$$

解得 $A = -\frac{3+2\sqrt{3}}{6}, B = \frac{-3+2\sqrt{3}}{6}, C = 1$. 所以 $a_n = -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 + \sqrt{3})^{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt{3})^{n+1} + 4^n$.

题目 4.5 的注记. 难度 ★★☆☆☆, 适合度 ★★★★★.

寻找递推关系需要一定技巧: 在设出 AB 至少出现一次的串数之后, AB 未出现的串数也可以用它表示.

4.5. 设长度为 n 、以 A 结尾且不出现子串 AB 的字符串有 a_n 个, 长度为 n 、以其他字母结尾且不出现子串 AB 的字符串有 b_n 个, 则

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases}$$

从而 $a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, 其中 $a_1 = 1, a_2 = 4$.

该递推关系的两个特征根为 $2 \pm \sqrt{3}$, 进而解出 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} - \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

长度为 n 、至少出现一次子串 AB 的字符串个数为 $4^n - a_n - b_n = 4^n - a_{n+1}$, 从而答案为

$$4^n - \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$$

4.6

题目 4.6. 考虑如下汉诺塔问题的变种: 有 A, B, C 三根柱子, 初始时 A 柱上有 n 个圆盘, 按直径从小到大的顺序编号为 1 到 n ; 最终目标是将所有偶数编号的盘套在 B 柱上、所有奇数编号的盘套在 C 柱上. 移动圆盘时的规则不变, 求所需的最小移动次数.

解. 设 b_n 为所求的最小移动次数, a_n 为原始汉诺塔问题在圆盘数为 n 时的最小移动次数. 由 $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ 得 $a_n = 2^n - 1$ (证明略).

假设 n 为偶数:

1. 圆盘 n 归位至 B : 所需最小移动次数为 $a_{n-1} + 1$.
2. 圆盘 $n-1$ 已自动归位至 C .
3. 圆盘 $n-2$ 归位至 B : 所需最小移动次数为 $a_{n-3} + 1$.
4. 圆盘 $n-3$ 归位至 C : 所需最小移动次数为 $a_{n-4} + 1$.
5. 圆盘 $n-4$ 已自动归位至 B .
6. 圆盘 $n-5$ 归位至 C : 所需最小移动次数为 $a_{n-6} + 1$.
7. 圆盘 $n-6$ 归位至 B : 所需最小移动次数为 $a_{n-7} + 1$.
8. 圆盘 $n-7$ 已自动归位至 C .

...

以上对 n 为奇数也成立, 只需将上述过程的 B 和 C 交换即可. 上述过程的周期为 3. 进一步地, 在圆盘 $n-2$ 归位后, 剩余的圆盘重新回到初始位置 A , 所以有以下递推关系:

$$b_n = (a_{n-1} + 1) + (a_{n-3} + 1) + b_{n-3} = 2^{n-1} + 2^{n-3} + b_{n-3} \quad (n \geq 4), \quad b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

注: 可推出 $b_0 = 0$.

对 $n \bmod 3$ 分类讨论:

$$\begin{aligned}
 b_{3k+1} &= 2^{3k} + 2^{3k-2} + b_{3k-2} \\
 &= 2^{3k} + 2^{3k-2} + 2^{3k-3} + 2^{3k-5} + b_{3k-5} \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=1}^k 2^{3i} + \sum_{i=1}^k 2^{3i-2} + b_1 \\
 &= \frac{2^{3k+3} - 2^3}{7} + \frac{2^{3k+1} - 2}{7} + 1 \\
 &= \frac{10 \cdot 8^k - 3}{7}
 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
 b_{3k+2} &= \sum_{i=1}^k 2^{3i+1} + \sum_{i=1}^k 2^{3i-1} + b_2 \\
 &= \frac{2^{3k+4} - 2^4}{7} + \frac{2^{3k+2} - 2^2}{7} + 2 \\
 &= \frac{20 \cdot 8^k - 6}{7} \\
 b_{3k+3} &= \sum_{i=1}^k 2^{3i+2} + \sum_{i=1}^k 2^{3i} + b_3 \\
 &= \frac{2^{3k+5} - 2^5}{7} + \frac{2^{3k+3} - 2^3}{7} + 5 \\
 &= \frac{40 \cdot 8^k - 5}{7}
 \end{aligned}$$

综上

$$b_n = \begin{cases} \frac{10 \cdot 8^k - 3}{7}, & n = 3k + 1 \\ \frac{20 \cdot 8^k - 6}{7}, & n = 3k + 2 \\ \frac{40 \cdot 8^k - 5}{7}, & n = 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

题目 4.6 的注记. 难度 ★★★★★☆, 适合度 ★★★★★.

相关数列: [A033120](#).

汉诺塔问题的解 $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2^n - 1$ 与二进制数密切相关, b_n 也是如此. 实际上, b_n 的二进制表示满足以下规律: 101 周期出现.

4.6

本题为类似汉诺塔的问题，我们可以逐步计算：

第一步一定将第 n 个盘归位，此时相当于把 $n-1$ 个盘移到另一个位置上，再额外移动一次，总的操作次数为 $H(n-1) + 1 = 2^{n-1}$ 。

第二步由于 $(n-1)$ 自动落位，需要把 $n-3$ 个盘移动，总的操作次数为 2^{n-3} ，此时 $n-3$ 个盘回到了初始位置，即剩余的操作次数为 a_{n-3} 。

所以我们可以得到递推式：

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} + a_{n-3}$$

同理可以得到 $2a_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 2a_{n-4}$ ，即 $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} - 2a_{n-4}$ 。

此时我们可以得到特征方程：

$$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0, (x-1)(x-2)(x^2 + x + 1) = 0$$

有特征根 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, x_4 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 。将复数根改写成三角函数形式，我们可以得到原数列的表达式为

$$a_n = A1^n + B2^n + C\cos\frac{2n}{3}\pi + D\sin\frac{2n}{3}\pi$$

我们已知一些初始值： $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 11$ ，带入等式中可以解得 $A = -\frac{2}{3}, B = \frac{5}{7}, C = -\frac{1}{21}, D = \frac{\sqrt{3}}{7}$ 。

即 a_n 的表达式为

$$a_n = -\frac{2}{3} + \frac{5}{7}2^n - \frac{1}{21}\cos\frac{2n}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{2n}{3}\pi$$

4.7

题目 4.7. 使用 k 种字母组成长度为 n 的字符串，但不允许相同字母连续出现 3 次，求方案数。

解. 设 a_n 为满足题意且最后两位字母不重复的字符串数目， b_n 为满足题意且最后两位字母重复的字符串数目。则 $c_n = a_n + b_n$ 即为所求。由题意知 a_n, b_n 满足以下递推关系：

$$\begin{cases} a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases}$$

即 $a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2} \ (n \geq 3)$, $a_1 = k$, $a_2 = k(k-1)$. 特征方程为 $r^2 - (k-1)r - (k-1) = 0$, 其根为 $r_1 = \frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$, $r_2 = \frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$.

若 $k = 1$, 则 $a_1 = 1$, $a_n = 0 \ (n \geq 2)$. $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_n = 0 \ (n \geq 3)$. 所以 $c_n = a_n + b_n = \begin{cases} 1, & n=1, 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$.

若 $k > 1$, 则 $r_1 \neq r_2$ 且可解得 $a_0 = 0$. 设 $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$, 代入初始条件 $a_0 = 0$, $a_1 = k$ 得

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ar_1 + Br_2 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{k}{r_1 - r_2} = \frac{k}{\sqrt{k^2+2k-3}} \\ B = \frac{k}{r_2 - r_1} = -\frac{k}{\sqrt{k^2+2k-3}} \end{cases}$$

所以 $a_n = \frac{k}{\sqrt{k^2+2k-3}} \left(\left(\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n \right) \ (n \geq 0)$. 由于 $b_1 = a_0 = 0$, 有

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + b_n = a_n + a_{n-1} \\ &= \frac{k}{\sqrt{k^2+2k-3}} \left(\left(\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{k}{\sqrt{k^2+2k-3}} \left(\left(1 + \frac{2}{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}} \right) \left(\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{2}{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}} \right) \left(\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^n \right) \\ &= \frac{k}{(k-1)\sqrt{k^2+2k-3}} \left(\left(\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

题目 4.7 的注记. 难度 ★★★☆☆, 适合度 ★★★★★.

递推关系不易找到. 实际上, 还有另一种递推式: 存在连续 3 个相同字母的字符串有 $k^n - a_n$ 个. 考虑这 3 个相同字母第一次出现的位置: 若出现在最后 3 位, 则前 $n-3$ 位字符串可能为任意的不存在连续 3 个相同字母的串, 后面的 3 个相同字母与前 $n-3$ 位字符串的末位不同, 方案数为 $(k-1)a_{n-3}$; 若不是最后 3 位, 则前 $n-1$ 位字符串可能为任意的存在连续 3 个相同字母的串, 最后一位字母任取, 方案数为 $k(k^{n-1} - a_{n-1})$. 所以 $k^n - a_n = (k-1)a_{n-3} + k(k^{n-1} - a_{n-1})$, 即 $a_n = ka_{n-1} - (k-1)a_{n-3} \ (n \geq 4)$. 此为三阶递推关系, 求解难度较大.

4.7. 设长度为 n 的符合要求的字符串有 a_n 个, 其中最后两个字符不同的字符串有 b_n 个, 则

$$\begin{cases} a_n = kb_{n-1} + (k-1)(a_{n-1} - b_{n-1}) \\ b_n = (k-1)a_{n-1} \end{cases}$$

从而

$$a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$$

其中, $a_1 = k$, $a_2 = k^2$.

该递推关系的两个特征根为

$$\frac{k-1 \pm \sqrt{(k-1)(k+3)}}{2}$$

进而解出 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{k(\sqrt{k+3} + \sqrt{k-1})}{2(k-1)\sqrt{k+3}} \left(\frac{k-1 + \sqrt{(k-1)(k+3)}}{2} \right)^n \\ + \frac{k(\sqrt{k+3} - \sqrt{k-1})}{2(k-1)\sqrt{k+3}} \left(\frac{k-1 - \sqrt{(k-1)(k+3)}}{2} \right)^n$$

4.8

4.8. 记

$$S_n^{(4)} = \sum_{k=1}^n k^4$$

则

$$S_n^{(4)} = S_{n-1}^{(4)} + n^4$$

错位逐差，有

$$S_n^{(4)} - S_{n-1}^{(4)} = S_{n-1}^{(4)} - S_{n-2}^{(4)} + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

再逐差，有

$$S_n^{(4)} - 2S_{n-1}^{(4)} + S_{n-2}^{(4)} = S_{n-1}^{(4)} - 2S_{n-2}^{(4)} + S_{n-3}^{(4)} = 12n^2 - 24n + 14$$

进一步逐差，有

$$S_n^{(4)} - 3S_{n-1}^{(4)} + 3S_{n-2}^{(4)} - S_{n-3}^{(4)} = S_{n-1}^{(4)} - 3S_{n-2}^{(4)} + 3S_{n-3}^{(4)} - S_{n-4}^{(4)} = 24n - 36$$

继续逐差，有

$$S_n^{(4)} - 4S_{n-1}^{(4)} + 6S_{n-2}^{(4)} - 4S_{n-3}^{(4)} + S_{n-4}^{(4)} = S_{n-1}^{(4)} - 4S_{n-2}^{(4)} + 6S_{n-3}^{(4)} - 4S_{n-4}^{(4)} + S_{n-5}^{(4)} = 24$$

即

$$S_n^{(4)} - 5S_{n-1}^{(4)} + 10S_{n-2}^{(4)} - 10S_{n-3}^{(4)} + 5S_{n-4}^{(4)} - S_{n-5}^{(4)} = 24$$

从而

$$\begin{aligned} S_n^{(4)} - 5S_{n-1}^{(4)} + 10S_{n-2}^{(4)} - 10S_{n-3}^{(4)} + 5S_{n-4}^{(4)} - S_{n-5}^{(4)} \\ = S_{n-1}^{(4)} - 5S_{n-2}^{(4)} + 10S_{n-3}^{(4)} - 10S_{n-4}^{(4)} + 5S_{n-5}^{(4)} - S_{n-6}^{(4)} \end{aligned}$$

进而

$$S_n^{(4)} - 6S_{n-1}^{(4)} + 15S_{n-2}^{(4)} - 20S_{n-3}^{(4)} + 15S_{n-4}^{(4)} - 6S_{n-5}^{(4)} + S_{n-6}^{(4)} = 0$$

初始项 $S_0^{(4)} = 0$, $S_1^{(4)} = 1$, $S_2^{(4)} = 17$, $S_3^{(4)} = 98$, $S_4^{(4)} = 354$, $S_5^{(4)} = 979$ 。

该递推公式的特征根为六重根 $x = 1$, 从而递推公式的形式为

$$S_n^{(4)} = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F$$

代入初始项, 解得

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

4.8

设 $a_n = \sum_{k=1}^n k^4$, 因为每次消除最高项的系数都为1, 即可以不断提取出 $(x-1)$ 因式, 对该式进行不断消元得到的特征方程为 $(x-1)^6 = 0$, 有6个重根。

为了方便消元求解各个系数的值, 我们令 $a_n = A + B * C(n, 1) + C * C(n, 2) + C * D(n, 3) + E * C(n, 4) + F * C(n, 5)$ 。

我们已知的结果为 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 17, a_3 = 98, a_4 = 354, a_5 = 979$ 。代入等式中可以得到

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A + B &= 1 \\ A + 2B + C &= 17 \\ A + 3B + 3C + D &= 98 \\ A + 4B + 6C + 4D + E &= 354 \\ A + 5B + 10C + 10D + 5E + F &= 979 \end{aligned}$$

可以解得 $A = 0, B = 1, C = 15, D = 50, E = 60, F = 24$, 即

$$a_n = C(n, 1) + 15C(n, 2) + 50C(n, 3) + 60C(n, 4) + 24C(n, 5)$$

4.9

解. 以下只讨论 $1 \leq k \leq n$.

(1) 讨论 $f(n, k)$: 若 n 不被选中, 方案数为 $f(n-1, k)$; 若 n 被选中, 则 $n-1$ 不会被选中, 其余 $k-1$ 个数字在 1 到 $n-2$ 中选取, 方案数为 $f(n-2, k-1)$. 所以 $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1)$ ($n \geq 3$). 初始条件为 $f(n, 1) = n$ ($n \geq 1$), $f(n, n) = 0$ ($n \geq 2$).

(2) 如图 1, 以下使用二元归纳证明: $f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$ ($\forall n, k \in \mathbb{N}^+, 1 \leq k \leq n$).

归纳基础: $f(n, 1) = n = \binom{n}{1}$ ($n \geq 1$), $f(n, n) = 0 = \binom{1}{n}$ ($n \geq 2$).

归纳: $\forall n, k \in \mathbb{N}^+, 1 < k < n$, 假设 $f(n-2, k-1) = \binom{n-k}{k-1}$, $f(n-1, k) = \binom{n-k}{k}$ 成立, 则

$$f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} = \binom{n-k+1}{k}$$

归纳知 $f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$ ($\forall n, k \in \mathbb{N}^+, 1 \leq k \leq n$).

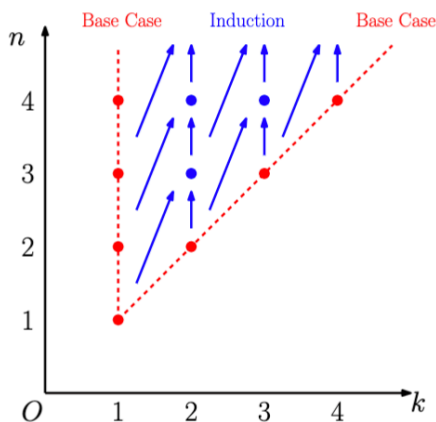


图 1: 二元归纳

(3) 若 n 不被选中, 方案数为 $f(n-1, k)$; 若 n 被选中, 则 $1, n-1$ 不会被选中, 其余 $k-1$ 个数字在 2 到 $n-2$ 中选取, 方案数为 $f(n-3, k-1)$. 所以

$$\begin{aligned} g(n, k) &= f(n-1, k) + f(n-3, k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\ &= \binom{n-k}{k} + \frac{k}{n-k} \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \end{aligned}$$

4.9. (1) 若选择 n , 则 $n-1$ 一定不能选, 相当于从前 $n-2$ 个数中选 $k-1$ 个不相邻的数, 这类情况的方案数为 $f(n-2, k-1)$ 。

若不选择 n , 则相当于从前 $n-1$ 个数中选 k 个不相邻的数, 这类情况的方案数为 $f(n-1, k)$ 。

因此, $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1)$ 。

(2) 下用数学归纳法证明: $f(n, k) = C_{n-k+1}^k$ ($2k \leq n+1$)。

当 $n=1$ 时, $f(1, 0) = C_{1-0+1}^0 = 1$, $f(1, 1) = C_{1-1+1}^1 = 1$, 故当 $n=1, 2k \leq n+1$ 时, 待证命题成立。

当 $n = 2$ 时, $f(2, 0) = C_{2-0+1}^0 = 1$, $f(2, 1) = C_{2-1+1}^1 = 2$, 故当 $n = 2$ 、 $2k \leq n + 1$ 时, 待证命题成立。

设 $n \leq n_0$ 、 $2k \leq n_0 + 1$ 时, 待证命题均成立。

当 $n = n_0 + 1$ 、 $2k \leq n_0 + 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(n_0 + 1, k) &= f(n_0, k) + f(n_0 - 1, k - 1) \\ &= C_{n_0-k+1}^k + C_{(n_0-1)-(k-1)+1}^{k-1} \\ &= C_{n_0-k+1}^k + C_{n_0-k+1}^{k-1} \\ &= C_{(n_0+1)-k+1}^k \end{aligned}$$

当 $n = n_0 + 1$ 、 $2k = n_0 + 2$ 时, 特别地, 有 $n = 2k - 1$ 。此时, 只有一种可能的选法 (选 1、3、 $\dots$ 、 n 共 k 个数), 故 $f(n, k) = 1 = C_{n-k+1}^k = C_{(n_0+1)-k+1}^k$ 。

从而, 当 $n = n_0 + 1$ 、 $2k \leq n_0 + 2$ 时, 待证命题均成立。

由数学归纳法, 知待证命题成立, 即

$$f(n, k) = C_{n-k+1}^k$$

其中, $2k \leq n + 1$ 。

(3) 若选 1, 则不能选 2, 也不能选 n , 从而相当于在 3 到 $n - 1$ 之间选 $k - 1$ 个数, 方案数为 $f(n - 3, k - 1)$ 。

若不选 1, 则相当于在 2 到 n 之间选 k 个数, 方案数为 $f(n - 1, k)$ 。

因此, $g(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 3, k - 1) = C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^{k-1}$, 其中, $2k \leq n$ 。

4.10

题目 4.10. 使用尺寸为 1×1 的方砖、直角边长为 1 的等腰直角三角形砖, 以及斜边长为 2 的等腰直角三角形砖, 铺设 $1 \times n$ 的路径, 求:

- (1) 所有可能的铺砖方案数;
- (2) 每一种可能的铺砖方案中使用的砖数相加, 得到的砖数的总和。

解. (1) 设 a_n 为铺设由 n 个正方形组成的路径的方案数. 设 b_n 为铺设由 $n - 1$ 个正方形与 1 个直角边长为 1 的等腰直角三角形组成的路径的方案数。

分析 a_n : $a_1 = 3$. 若最后一块砖为方砖, 则方案数为 a_{n-1} ; 若最后一块砖为直角边长为 1 的等腰直角三角形 (有 2 种摆放方式), 则方案数为 $2b_n$. 最后一块砖不可能是斜边长为 2 的等腰直角三角形.

分析 b_n : $b_1 = 1$. 若最后一块砖为直角边长为 1 的等腰直角三角形, 则方案数为 a_{n-1} ; 若最后一块砖为斜边长为 2 的等腰直角三角形, 则方案数为 b_{n-1} . 最后一块砖不可能是方砖.

综上, 有以下递推关系:

$$a_n = a_{n-1} + 2b_n \quad (1)$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad (2)$$

从而

$$2a_{n-1} = 2b_n - 2b_{n-1} = (a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2}) = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

得 a_n 的递推关系为

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3) \quad (3)$$

初始条件为 $a_1 = 3$, $a_2 = a_1 + 2b_2 = a_1 + 2(a_1 + b_1) = 11$, $a_0 = 4a_1 - a_2 = 1$.

特征方程为 $r^2 - 4r + 1 = 0$, 其根为 $r_1 = 2 + \sqrt{3}$, $r_2 = 2 - \sqrt{3}$. 设 $a_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$. 代入初始条件

$$a_0 = A + B = 1$$

$$a_1 = (2 + \sqrt{3})A + (2 - \sqrt{3})B = 3$$

解得 $A = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $B = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. 所以 $a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt{3})^n$.

(2) 设 c_n 为铺设由 n 个正方形组成的路径时, 将每一种可能的铺砖方案中使用的砖数相加得到的砖数的总和. 设 d_n 为铺设由 $n-1$ 个正方形与 1 个直角边长为 1 的等腰直角三角形组成的路径时, 将每一种可能的铺砖方案中使用的砖数相加得到的砖数的总和.

分析 c_n : 若最后一块砖为方砖, 则方案数为 a_{n-1} , 前面路径合计使用了 c_{n-1} 块砖, 最后一块砖合计使用了 a_{n-1} 次; 若最后一块砖为直角边长为 1 的等腰直角三角形 (有 2 种摆放方式), 则方案数为 $2b_n$, 前面路径合计使用了 $2d_n$ 块砖, 最后一块砖合计使用了 $2b_n$ 次. 最后一块砖不可能是斜边长为 2 的等腰直角三角形.

分析 d_n : 若最后一块砖为直角边长为 1 的等腰直角三角形, 则方案数为 a_{n-1} , 前面路径合计使用了 c_{n-1} 块砖, 最后一块砖合计使用了 a_{n-1} 次; 若最后一块砖为斜边长为 2 的等腰直角三角形, 则方案数为 b_{n-1} , 前面路径合计使用了 d_{n-1} 块砖, 最后一块砖合计使用了 b_{n-1} 次. 最后一块砖不可能是方砖.

综上, 有以下递推关系:

$$c_n = c_{n-1} + a_{n-1} + 2d_n + 2b_n$$

$$d_n = c_{n-1} + a_{n-1} + d_{n-1} + b_{n-1}$$

从而

$$\begin{aligned} 2c_{n-1} + 2a_{n-1} + 2b_{n-1} &= 2d_n - 2d_{n-1} \\ &= (c_n - c_{n-1} - a_{n-1} - 2b_n) - (c_{n-1} - c_{n-2} - a_{n-2} - 2b_{n-1}) \end{aligned}$$

利用 a_n, b_n 的递推关系式 (1) (3), 得

$$\begin{aligned} c_n &= 4c_{n-1} - c_{n-2} + 3a_{n-1} - a_{n-2} + 2b_n \\ &= 4c_{n-1} - c_{n-2} + 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_n \\ &= 4c_{n-1} - c_{n-2} + 2(a_n - a_{n-1}) \\ &= 4c_{n-1} - c_{n-2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}(2 + \sqrt{3})^n - \frac{2\sqrt{3}}{3}(2 - \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

这是一个二阶非齐次线性常系数递推关系, 特征方程为 $r^2 - 4r + 1 = 0$, 其根同样为 $r_1 = 2 + \sqrt{3}, r_2 = 2 - \sqrt{3}$. 知 c_n 的形式为 $c_n = (An + B)r_1^n + (Cn + D)r_2^n$. 将其代回递推式得

$$\begin{aligned} &(An + B)r_1^n + (Cn + D)r_2^n \\ &= 4((A(n-1) + B)r_1^{n-1} + (C(n-1) + D)r_2^{n-1}) \\ &\quad - ((A(n-2) + B)r_1^{n-2} + (C(n-2) + D)r_2^{n-2}) \\ &\quad + \frac{2\sqrt{3}}{3}(r_1^n - r_2^n) \end{aligned}$$

等式两侧 r_1^n, r_2^n 项的系数应分别相等, 从而

$$\begin{aligned} (An + B)r_1^n &= 4(A(n-1) + B)r_1^{n-1} - (A(n-2) + B)r_1^{n-2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}r_1^n \\ (Cn + D)r_2^n &= 4(C(n-1) + D)r_2^{n-1} - (C(n-2) + D)r_2^{n-2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}r_2^n \end{aligned}$$

由于 r_1, r_2 是特征方程 $r^2 - 4r + 1 = 0$ 的根, 化简上式, 可消去 B, D , 得

$$\begin{aligned} Anr_1^2 &= 4A(n-1)r_1 - A(n-2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}r_1^2 \\ Cnr_2^2 &= 4C(n-1)r_2 - C(n-2) - \frac{2\sqrt{3}}{3}r_2^2 \end{aligned}$$

进一步地, 可消去 Anr_1^2, Cnr_2^2 , 得

$$\begin{aligned} 4Ar_1 - 2A &= \frac{2\sqrt{3}}{3}r_1^2 \\ 4Cr_2 - 2C &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}r_2^2 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{r_1^2}{2r_1 - 1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \\ C &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{r_2^2}{2r_2 - 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

初值条件 $c_1 = 5, d_1 = 1$, 从而 $d_2 = c_1 + a_1 + d_1 + b_1 = 10, c_2 = c_1 + a_1 + 2d_2 + 2b_2 = c_1 + a_1 + 2d_2 +$

$2(a_1 + b_1) = 36$. 由 $c_1 = c_0 + a_0 + 2d_1 + 2b_1 = 5$ 得 $c_0 = 0$. 代入初值条件

$$c_0 = B + D = 0$$

$$c_1 = (A + B)r_1 + (C + D)r_2 = 5 \implies Br_1 + Dr_2 = 5 - Ar_1 - Cr_2 = \frac{1}{3}$$

解得

$$B = \frac{1}{3(r_1 - r_2)} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$D = \frac{1}{3(r_2 - r_1)} = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

所以 $c_n = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}n + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{18}\right)(2 - \sqrt{3})^n$.

题目 4.10 的注记. 难度 ★★★☆☆, 适合度 ★★★★★☆.

相关数列: [A001835](#).

按照课本例题的方法, 使用代入通项的方法简化对 A, B, C, D 的求解, 不必求解四元一次方程组.

4.10. (1) 设方案数为 a_n 。

第一类情况：最后一块砖为方砖，则此类情况的方案数为 a_{n-1} 。

第二类情况：最后一块砖为小三角砖，倒数第二块砖也为小三角砖，则由于最后一块小三角砖有两种转向，此类情况的方案数为 $2a_{n-1}$ 。

第三类情况：最后一块砖为小三角砖，倒数第 2 到 $k-1$ 个砖均为大三角砖，倒数第 k 个砖又为小三角砖 ($k \geq 3$)，则由于最后一块小三角砖有两种转向，此类情况的方案数为 $2a_{n-k+1}$ 。

因此，可化简、整理得递推关系

$$a_n = a_{n-1} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad (*)$$

初始值 $a_0 = 1$ 。

对式 (*) 逐差，整理得

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$$

其中 $a_1 = 3$ 。

该递推关系的两个特征根为 $2 \pm \sqrt{3}$ ，进而解出 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n}{6}$$

(2) 设砖数的总和为 b_n 。

第一类情况：最后一块砖为方砖，则此类情况的砖数总和为 $b_{n-1} + a_{n-1}$ 。

第二类情况：最后一块砖为小三角砖，倒数第二块砖也为小三角砖，则由于最后一块小三角砖有两种转向，此类情况的砖数总和为 $2b_{n-1} + 4a_{n-1}$ 。

第三类情况：最后一块砖为小三角砖，倒数第 2 到 $k-1$ 个砖均为大三角砖，倒数第 k 个砖又为小三角砖 ($k \geq 3$)，则由于最后一块小三角砖有两种转向，此类情况的砖数总和为 $2b_{n-k+1} + 2ka_{n-k+1}$ 。

因此，可得递推关系

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1} + 2 \sum_{k=2}^{n+1} (b_{n-k+1} + k a_{n-k+1})$$

化简、整理得

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + (n+1-i)a_i)$$

逐差，整理得

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2} + 3a_{n-1} - a_{n-2} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

由第 (1) 问 (*) 式，知

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_n - a_{n-1}$$

从而可将上式改写为

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2} + 3a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1}$$

即

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2} + a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

再逐差，得

$$b_n = 5b_{n-1} - 5b_{n-2} + b_{n-3} + a_n + a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

结合 $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ ，可将含 $\{a_n\}$ 的部分转化为

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} &= a_n + (4a_{n-2} - a_{n-3}) - 3a_{n-2} + a_{n-3} \\ &= a_n + a_{n-2} \\ &= 4a_{n-1} \end{aligned}$$

从而

$$b_n = 5b_{n-1} - 5b_{n-2} + b_{n-3} + 4a_{n-1}$$

即

$$b_n - 5b_{n-1} + 5b_{n-2} - b_{n-3} = 4a_{n-1}$$

再结合 $4a_{n-1} - 16a_{n-2} + 4a_{n-3} = 0$, 进一步整理得

$$b_n - 9b_{n-1} + 26b_{n-2} - 26b_{n-3} + 9b_{n-4} - b_{n-5} = 0$$

特征方程为

$$(x-1)(x^2-4x+1)^2=0$$

初始项 $b_0 = 0, b_1 = 5, b_2 = 36, b_3 = 199, b_4 = 984$ 。

经计算, $\{b_n\}$ 的通项公式是

$$b_n = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}n + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)(2+\sqrt{3})^n + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{18}\right)(2-\sqrt{3})^n$$

4.11

4.11. (1) 先考虑 $f(n, m)$ 。将 n 个相同的小球放入 m 个相同的盒子, 且恰好有 $m-k$ 个空盒, 与将 $n-k$ 个相同的小球放入 k 个相同的盒子且允许出现空盒的方案数相等。 k 的值可以取遍 1 到 m , 因此

$$f(n, m) = \sum_{k=1}^m f(n-k, k)$$

初始项 $f(1, m) = 1 (\forall m \geq 1)$ 。

再考虑 $g(n, m)$ 。将 n 无序拆分为若干正整数之和, 且拆分出的数最大值为 k , 与将 $n-k$ 无序拆分为若干正整数之和且拆分出的数均不大于 k 的方案数相等。 k 的值可以取遍 0 到 m , 因此

$$f(n, m) = \sum_{k=1}^m f(n-k, k)$$

初始项 $g(1, m) = 1 (\forall m \geq 1)$ 。

因此, $f(n, m)$ 与 $g(n, m)$ 满足相同的递推关系, 从而 $f(n, m) = g(n, m)$ 。

2. (I) $\Rightarrow$ (II): 设 m 个盒子装球的数量从大到小依次是 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 0$, 则各个盒子装球数量的总和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$ 。

对于上述方案, 构造 $(a_1 - a_2)$ 个 1, $(a_2 - a_3)$ 个 2, 以此类推, 直到 $(a_{m-1} - a_m)$ 个 $(m-1)$, a_m 个 m , 一组共 a_1 个 1 到 m 之间的正整数。由阿贝尔求和公式, 这些正整数之和

$$\sum_{i=1}^{m-1} (a_i - a_{i+1})i + a_m m = \sum_{i=1}^m (i - (i-1))a_i = \sum_{i=1}^m a_i = n$$

因此, 上述所构造的 a_1 个 1 到 m 之间的正整数即为正整数 n 的一组整数分拆, 且拆分出的数均不大于 m 。

容易验证, 对于任意两个不同的放球方案, 通过上述方式构造的整数分拆方案也不相同。因此, 上述构造方法给出了从 (I) 到 (II) 的单射。

(II) $\Rightarrow$ (I): 考虑上述映射方案的逆。对于符合题目要求的任意一组分拆方案, 设有 b_1 个 1, b_2 个 2, 以此类推, b_m 个 m , 均可以通过逆映射, 得到一组放球方案, 即 m 个盒子装球的数量从大到小依次为 $(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)$ 、 $(b_2 + b_3 + \cdots + b_m)$ 、 $\cdots$ 、 $(b_{m-1} + b_m)$ 、 b_m 。容易看出, 球的总数就是 $1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + \cdots + m \cdot b_m = n$ 。从而, 对于符合题目要求的任意一组分拆方案, 均可逆映射到一组放球方案。因此, 第一部分构造出的映射也是 (I) 到 (II) 的满射。

综合两部分, 知 (I) 的放球方案与 (II) 的分拆方案可构成一一对应关系。

4.11

(1) 首先计算 $f(n, m)$, 按照是否存在空盒子进行递推:

- 若不存在空盒, 则每个盒子至少放了 1 个球, 此时的方案数目等效为 $(n-m)$ 个球的情况, 即 $f(n-m, m)$ 。
- 若存在空盒至少 1 个, 我们去掉一个盒子并不会对结果造成影响, 即方案数目为 $f(n, m-1)$ 。

两种方案包括了所有的情况, 即 $f(n, m) = f(n-m, m) + f(n, m-1)$ 。

对于 $g(n, m)$, 我们考虑是否有数达到了最大值 m :

- 如果有, 我们考虑剩余数的划分, 即为 $g(n-m, m)$ 。
- 如果没有, 则我们可以把上限-1, 不会影响划分结果, 即 $g(n, m-1)$ 。
- 所以我们得到了递推式 $g(n, m) = g(n-m, m) + g(n, m-1)$ 。

我们现在对于 f 和 g , 得到了相同的递推关系, 再考察一下初值选择: $f(1, k) = g(1, k) = 1$, 当有值取 0 时默认为 1, 所以两种情景的方案数目完全相同, 即 $f(n, m) = g(n, m)$ 。

(2) 我们可以横向看待小球放入盒中的问题, 假设对于放入同一个盒子中的小球顺序编号, 则对于全部的盒子, 编号相同的球的个数 (盒子数) 即相当于整数划分中一个正整数的大小, 在全部盒子都至少有一个球时, 即相当于一个最大为 m 的正整数, 这样我们可以把放球问题和整数划分问题联系起来。

评价: 不错, 课上问题的细化

4.12

题目 4.12. 求解递推关系:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3\sin\frac{n\pi}{2} (n \geq 2) \\ a_0 = 5, a_1 = 3 \end{cases}$$

解. 首先求解齐次递推关系 $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$. 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 其根为 $r_1 = 2, r_2 = 1$. 所以 $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 1^n = A \cdot 2^n + B$.

再找一个特解. 设 $v_n = C \sin \frac{n\pi}{2} + D \cos \frac{n\pi}{2}$, 代入递推关系得

$$\begin{aligned} & C \sin \frac{n\pi}{2} + D \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= 3 \left(C \sin \frac{(n-1)\pi}{2} + D \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \right) - 2 \left(C \sin \frac{(n-2)\pi}{2} + D \cos \frac{(n-2)\pi}{2} \right) + 3 \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= 3 \left(-C \cos \frac{n\pi}{2} + D \sin \frac{n\pi}{2} \right) - 2 \left(-C \sin \frac{n\pi}{2} - D \cos \frac{n\pi}{2} \right) + 3 \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= (3D + 2C + 3) \sin \frac{n\pi}{2} + (2D - 3C) \cos \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases} 3D + 2C + 3 = C \\ 2D - 3C = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{3}{10} \\ D = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

所以 $v_n = -\frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2}$. $a_n = u_n + v_n = A \cdot 2^n + B - \frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2}$.

代入初始条件

$$\begin{aligned} a_0 &= A + B - \frac{9}{10} = 5 \\ a_1 &= 2A + B - \frac{3}{10} = 3 \end{aligned}$$

解得 $A = -\frac{13}{5}, B = \frac{17}{2}$. 所以 $a_n = -\frac{13}{5} \cdot 2^n + \frac{17}{2} - \frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2}$.

题目 4.12 的注记. 难度 ★★☆☆☆, 适合度 ★★★★★☆.

一道线性常系数非齐次递推问题. 当非齐次项出现三角函数 $\sin \theta n$ 时, 若 $e^{i\theta}$ 不是特征根, 可用 $C_1 \sin \theta n + C_2 \cos \theta n$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) 构造特解, 即 $\Im(C e^{i\theta n})$ ($C \in \mathbb{C}$).

4.12. 由欧拉公式, 递推关系式可改写为

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + \frac{3}{2} \exp \frac{i(n-1)\pi}{2} + \frac{3}{2} \exp \frac{-i(n-1)\pi}{2}$$

该递推关系的两个特征根为 1 和 2，特解形式为 $C_1 \exp \frac{in\pi}{2} + C_2 \exp \frac{-in\pi}{2}$ 。

为了计算特解系数 C_1 和 C_2 ，先代入递推关系式，有

$$\begin{aligned} C_1 \exp \frac{in\pi}{2} + C_2 \exp \frac{-in\pi}{2} = & 3C_1 \exp \frac{i(n-1)\pi}{2} + 3C_2 \exp \frac{-i(n-1)\pi}{2} \\ & - 2C_1 \exp \frac{i(n-2)\pi}{2} - 2C_2 \exp \frac{-i(n-2)\pi}{2} \\ & + \frac{3}{2} \exp \frac{i(n-1)\pi}{2} + \frac{3}{2} \exp \frac{-i(n-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

为了保证上式恒成立，需要

$$\begin{cases} C_1 \exp \frac{in\pi}{2} = 3C_1 \exp \frac{i(n-1)\pi}{2} - 2C_1 \exp \frac{i(n-2)\pi}{2} + \frac{3}{2} \exp \frac{i(n-1)\pi}{2} \\ C_2 \exp \frac{-in\pi}{2} = 3C_2 \exp \frac{-i(n-1)\pi}{2} - 2C_2 \exp \frac{-i(n-2)\pi}{2} + \frac{3}{2} \exp \frac{-i(n-1)\pi}{2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} C_1 \exp \frac{2i\pi}{2} = 3C_1 \exp \frac{i\pi}{2} - 2C_1 + \frac{3}{2} \exp \frac{i\pi}{2} \\ C_2 \exp \frac{-2i\pi}{2} = 3C_2 \exp \frac{-i\pi}{2} - 2C_2 + \frac{3}{2} \exp \frac{-i\pi}{2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -C_1 = 3iC_1 - 2C_1 + \frac{3i}{2} \\ -C_2 = -3iC_2 - 2C_2 - \frac{3i}{2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-9+3i}{20} \\ C_2 = \frac{-9-3i}{20} \end{cases}$$

从而特解

$$C_1 \exp \frac{in\pi}{2} + C_2 \exp \frac{-in\pi}{2} = -\frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2}$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的形式为

$$a_n = A + B \cdot 2^n - \frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2}$$

代入 $a_0 = 5$, $a_1 = 3$ ，解得 $A = \frac{17}{2}$, $B = -\frac{13}{5}$ ，从而数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{17}{2} - \frac{13}{5} \cdot 2^n - \frac{9}{10} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{10} \sin \frac{n\pi}{2}$$

4.13

题目 4.13. 设 p, q 是实数, 求解下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} p & p-q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & p & p-q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & p-q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{vmatrix}$$

解. 设 D_n 为 n 阶行列式. 对第 1 行展开, 得

$$D_n = pD_{n-1} - q(p-q)D_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

初始条件为 $D_1 = p, D_2 = p^2 - q(p-q)$, 可解得 $D_0 = 1$. 特征方程为 $r^2 - pr + q(p-q) = 0$, 其根为 $r_1 = q, r_2 = p-q$.

若 $p \neq 2q$, 设 $D_n = Aq^n + B(p-q)^n$. 代入初始条件

$$D_0 = A + B = 1$$

$$D_1 = Aq + B(p-q) = p$$

解得 $A = -\frac{q}{p-2q}, B = \frac{p-q}{p-2q}$. 所以 $D_n = \frac{1}{p-2q}((p-q)^{n+1} - q^{n+1})$.

若 $p = 2q$, 设 $D_n = (An + B)q^n$. 代入初始条件

$$D_0 = B = 1$$

$$D_1 = (A + B)q = p = 2q$$

若 $q \neq 0$, 解得 $A = 1, B = 1$. 所以 $D_n = (n+1)q^n$. 结论对 $q = 0$ 也成立.

综上

$$D_n = \begin{cases} \frac{1}{p-2q}((p-q)^{n+1} - q^{n+1}) & (p \neq 2q) \\ (n+1)q^n & (p = 2q) \end{cases}$$

题目 4.13 的注记. 难度 ★★☆☆☆, 适合度 ★★★★★.

一道线性代数问题. 这是已在线性代数课程熟知的三对角行列式, 可以使用上述递推关系求解, 也可以使用追赶法 LU 分解.

设行列式的值构成的数列为 a_n 。

考虑递推式，我们可以通过余子式的计算来得到 a_n ，对第一行进行展开：

$$\begin{aligned}a_n &= p * a_{n-1} - (p - q) * k_{n-1} \\&= pa_{n-1} - (p - q)(qa_{n-2} - 0) \\&= pa_{n-1} - q(p - q)a_{n-2}\end{aligned}$$

所以我们得到了一个线性的递推关系，特征方程为 $x^2 - px + q(p - q) = 0$ ，该方程可以因式分解： $(x - q)(x - (p - q)) = 0$ ，存在两个特征根 $x_1 = q, x_2 = p - q$ ，假设 $q \neq p - q, p - 2q \neq 0$ ，则两个根不相等，我们已知 $a_1 = p, a_2 = p^2 - pq + q^2$ ，可以得到两个方程：

$$\begin{aligned}Aq + B(p - q) &= p \\Aq^2 + B(p - q)^2 &= p^2 - pq + q^2\end{aligned}$$

解得 $A = -\frac{q}{p-2q}, B = \frac{p-q}{p-2q}$ ，即

$$a_n = -\frac{q}{p-2q}q^n + \frac{p-q}{p-2q}(p-q)^n$$

当两个根相等时，即 $p = 2q$ ，此时原行列式的结果为 $a_n = (A + Bn)q^n$ ，仍然代入初值得到方程：

$$\begin{aligned}(A + B)q &= p \\(A + 2B)q^2 &= p^2 - pq + q^2\end{aligned}$$

此时 $A = B = 1$ ，即 $a_n = (n + 1)q^n$ 。

评价：不错，但是考察了一些线性代数内容

4.14

4.14. 设移动 n 次后仍然回到位置 1 的不同路径数目为 a_n ，则移动 n 次后不在位置 1 的不同路径数为 $(m-1)^n - a_n$ ，从而可得递推关系：

$$a_{n+1} = (m-1)^n - a_n$$

初始项 $a_1 = 0$ 。

该递推关系的特征根为 -1 ，故 $\{a_n\}$ 通项公式的形式为

$$a_n = A(-1)^n + B(m-1)^n$$

先算 B 。为了保证递推关系恒成立，要求

$$B(m-1)^{n+1} = (m-1)^n - B(m-1)^n$$

从而 $B = \frac{1}{m}$ 。因此 $\{a_n\}$ 通项公式的形式为

$$a_n = A(-1)^n + \frac{(m-1)^n}{m}$$

代入 $a_1 = 0$ ，得 $A = \frac{m-1}{m}$ ，从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{m-1}{m}(-1)^n + \frac{(m-1)^n}{m}$$

我们分别考虑移动 n 次后醉汉到达的位置，由于除了位置 1 之外的位置都相同，我们设移动 n 次到达位置 1 的路径数目为 a_n ，到达其他位置的路径数目为 b_n ，则我们可以得到下列递推式：

$$\begin{aligned} a_n &= (m-1)b_{n-1} \\ b_n &= (m-2)b_{n-1} + a_{n-1} \end{aligned}$$

其中第一个式子表示第 n 次到达位置 1 时，一定从其他位置移动过来，而所有其他位置的方案是相同的；第二个式子是针对其他位置的递推式，因为位置 1 是起点较为特殊，需要分开计算。通过这两个式子求解 b_n 非常方便，可以得到特征方程：

$$x^2 - (m-2)x - (m-1) = 0$$

该方程有两个根 $x_1 = -1, x_2 = m-1$ ，我们可以得到 b_n 的表达式为 $b_n = A(-1)^n + B(m-1)^n$ ，代入初值 $b_0 = 0, b_1 = 1$ 可以得到结果为

$$b_n = \frac{1}{m}(m-1)^n - \frac{1}{m}(-1)^n$$

然后根据第一个等式，我们可以很容易的得到 a_n 的表达式：

$$a_n = \frac{1}{m}(m-1)^n + \frac{m-1}{m}(-1)^n$$

评价：不错，有着较好的实际意义，不过难度在进阶可能略低